



Contribution à l'étude des Fermions et de leurs angles de mélange en Théorie Quantique des Champs

Quentin Duret

► To cite this version:

Quentin Duret. Contribution à l'étude des Fermions et de leurs angles de mélange en Théorie Quantique des Champs. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. Français. NNT: . tel-00339236

HAL Id: tel-00339236

<https://theses.hal.science/tel-00339236>

Submitted on 24 Nov 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PARIS VI - PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité

PHYSIQUE THÉORIQUE

Présentée par

M. Quentin Duret

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS VI

Sujet :

**Contribution à l'étude des Fermions
et de leurs angles de mélange
en Théorie Quantique des Champs**

soutenue le 25 septembre 2008 devant le jury composé de :

Mme	Belen Gavela	Rapporteur
M.	Carlo Giunti	Rapporteur (absent)
M.	Stéphane Lavignac	Examineur
M.	Bruno Machet	Directeur de thèse
M.	Jean Orloff	Examineur
M.	Jean-Bernard Zuber	Président du jury

à mes parents, Jacques et Frédérique,

à ma bien-aimée, Florine

Remerciements

Toute ma gratitude va bien sûr en premier lieu à Bruno Machet, qui a su me guider et me soutenir avec patience et gentillesse tout au long de ces trois années, dans les méandres parfois tortueux de mon travail de recherche, et que j'ai toujours trouvé disponible et accueillant.

J'exprime également ma reconnaissance à Mikhaïl Vysotsky, pour l'aide précieuse qu'il m'a apporté au cours de notre collaboration, ainsi qu'à Olivier Babelon, pour m'avoir accueilli au LPTHE durant ces trois années de thèse.

Je remercie sincèrement les deux rapporteurs, Mme Gavela et M. Giunti, qui ont accepté de s'immerger dans mon travail de thèse, et dont les précieux conseils m'ont aidé à en rendre plus juste la présentation faite dans ce manuscrit.

J'adresse de même tous mes remerciements aux membres du jury, qui m'ont fait l'honneur de venir assister à ma soutenance.

Je tiens à remercier également tous mes compagnons d'infortune sans qui cette thèse aurait été beaucoup plus terne ! César, David, Clément, Matthieu, Alexis, Benoît, Tiago, Juao, Camille et Alberto, oui, vous tous les petits *jokers*, ce fut un réel plaisir de travailler au quotidien à vos côtés, dans la joie et la bonne humeur ! Merci pour votre présence et vos délires qui ont pu rendre légers même les moments les plus difficiles, et amusantes même les pires looses (comme se faire un petit *time challenge* au labo...)

Merci aussi à Damien pour tous les coups de mains en informatique, tous ces petits services qui simplifient tellement la vie !

Et merci aussi à toutes ces demoiselles amies des sus-mentionnés (David tu es dans le lot) qui ont su adoucir à leur manière, par leurs délicieux gâteaux, le quotidien parfois âpre d'un thésard !

En particulier, une pensée particulière pour Fanny.

Merci également à mes amis, de l'aumônerie en particulier, pour tous les chouettes moments vécus ensemble ces trois années, Fady, Florian, Edouard, Hortense, Cécile, Solange, Joseph(s), Pierre-O, Christophe(s), et tous les autres que j'ai pu oublier.

Merci du fond du coeur à ma famille, et tout particulièrement à mes parents, qui m'ont toujours entouré de leur amour, et soutenu avec une confiance bienveillante, sans cesse renouvelée. Je leur en serai toujours profondément reconnaissant.

Enfin, merci à Florine dont l'amour m'a porté, et m'a donné sans cesse le courage et la force pour mener à terme ce travail.

"Avant de quitter cette table sur laquelle j'ai fait toutes mes recherches, il ne me reste plus qu'à élever mes yeux et mes mains vers le ciel, et à adresser avec dévotion mon humble prière à l'Auteur de toute lumière. Ô toi qui, par les lumières sublimes que tu as répandues sur toute la nature, élèves nos désirs jusqu'à la divine lumière de ta grâce, afin que nous soyons un jour transportés dans la lumière éternelle de ta gloire, je te rends grâce, Seigneur et Créateur, de toutes les joies que j'ai éprouvées dans les extases où m'a jeté la contemplation de l'oeuvre de tes mains ! Voilà que j'ai terminé ce livre qui contient le fruit de mes travaux, et j'ai mis à le composer toute la somme d'intelligence que tu m'as donnée. J'ai proclamé devant les hommes toute la grandeur de tes oeuvres ; je leur en ai expliqué les témoignages autant que mon esprit fini m'a permis d'en embrasser l'étendue infinie. J'ai fait tous mes efforts pour m'élever jusqu'à la vérité par les voies de la philosophie ; et s'il m'était arrivé, à moi, méprisable vermisseau conçu et nourri dans le péché, de dire quelque chose d'indigne de toi, fais-le-moi connaître, afin que je puisse l'effacer. Ne me suis-je point laissé aller aux séductions de la présomption, en présence de la beauté admirable de tes oeuvres ? Ne me suis-je pas proposé ma propre renommée parmi les hommes en élevant ce monument qui devait être consacré tout entier à ta gloire ? Oh ! s'il en était ainsi, reçois-moi dans ta clémence et dans ta miséricorde, et accorde-moi cette grâce, que l'oeuvre que je viens d'achever soit à jamais impuissante à faire le mal, mais qu'elle contribue à ta gloire et au salut des âmes !"

Johannes Kepler(1571-1630)

Résumé

Cette thèse est divisée en deux parties. La première est consacrée à l'étude des angles de mélange des fermions en Théorie Quantique des Champs (TQC). Nous montrons que, du fait de la non-orthonormalité de ses états propres de masse, la matrice de mélange d'un système non-dégénéré de fermions couplés ne peut pas être considérée comme unitaire ; puis, dans le cadre du Modèle Standard, que les angles de mélange des quarks et des leptons se révèlent compatibles avec une structure précise des courants neutres, où universalité et absence des courants changeant la saveur sont violées avec la même amplitude. Puis nous retrouvons de manière perturbative la non-unitarité de la matrice de mélange par l'annulation des transitions non-diagonales à une boucle entre états propres de masse. Nous étudions enfin les transformations de saveur pertinentes dans cette démarche, et esquissons un lien entre les courants neutres et la matrice de masse considérée habituellement pour des systèmes couplés. La deuxième partie présente les premiers résultats d'une étude générale des contraintes apportées en TQC par les symétries discrètes (parité P , conjugaison de charge C et renversement du temps T) sur le Lagrangien et le propagateur fermioniques. Nous montrons, dans le cas d'une génération, que ces derniers, écrits de la manière la plus générale compatible avec l'invariance de Lorentz, sont naturellement invariants sous le produit PCT , puis que les états propres d'un propagateur invariant sous C sont des fermions de Majorana.

Abstract

This thesis is divided into two parts. The first one is devoted to the study of the fermion mixing angles in Quantum Field Theory (QFT). We show that, due to the non-orthonormality of its mass eigenstates, the mixing matrix of a nondegenerate system of coupled fermions cannot be considered a priori to be unitary ; then, in the standard model framework, that all mixing angles of quarks and leptons are consistent with a precise structure of neutral currents, in which universality and absence of flavour changing currents are equally violated. This scheme yields the quark-lepton complementarity relation between the Cabibbo angle and the second mixing angle of neutrinos. We also recover perturbatively the nonunitarity of the mixing matrix by cancelling nondiagonal one-loop transitions between mass eigenstates, and show how the gauge symmetry nevertheless guarantees the unitarity of the Cabibbo matrix which occurs in renormalized gauge currents. We finally study the flavour transformations that are relevant in this procedure, and outline a link between the neutral currents and the mass matrix usually considered for coupled systems. The second part presents the first results of a general study of the constraints cast in QFT by the discrete symmetries (parity P , charge conjugation C and time reversal T) on the fermionic Lagrangian and propagator. We show for one generation that the latter, being written in the most general way compatible with Lorentz invariance, are naturally PCT -invariant, and that the eigenstates of a C -invariant propagator are Majorana fermions.

Table des matières

Introduction	1
I Angles de mélange des quarks et des leptons en Théorie Quantique des Champs	3
1 Le mélange de fermions dans le Modèle Standard	7
1.1 Le Modèle Standard : bref survol	7
1.1.1 Bosons	7
1.1.2 Fermions	9
1.2 Le problème des masses des neutrinos	11
1.3 Conclusion : les différentes bases fermioniques	12
2 Systèmes de fermions couplés non-dégénérés en Théorie Quantique des Champs	15
2.1 Etats propres de masse	15
2.2 Cas d'un système à deux particules	17
2.3 Conclusion	19
3 Angles de mélange des quarks et des leptons en Théorie Quantique des Champs	21
3.1 Deux générations	21
3.1.1 Courants neutres	21
3.1.2 Cas standard et matrice unitaire	23
3.1.3 Développement au voisinage de l'unitarité et angle de Cabibbo	25
3.2 Trois générations	27
3.2.1 Le secteur des quarks	30
3.2.2 Le secteur des leptons	33
3.3 Discussion	36
3.4 Conclusion	37
4 Une approche perturbative de la non-unitarité de la matrice de mélange	39
4.1 Transitions non-diagonales à une boucle	39
4.2 Diagonalisation du lagrangien à une boucle	41
4.2.1 Résumé de la démarche perturbative	44
4.3 Courants chargés et matrice de Cabibbo renormalisée	44
4.3.1 Calcul naïf et matrice de Cabibbo non unitaire	45
4.3.2 Symétrie de jauge et hermiticité, ou comment retrouver une matrice de Cabibbo unitaire	45

4.3.3	Conclusion : courants neutres dans la base des états propres de masse renormalisés	47
5	Symétries, angles de mélange et matrices de masse	49
5.1	Symétrie horizontale	49
5.2	Angles de mélange et matrices de masse	52
5.2.1	Rappels sur la matrice de masse en Théorie Quantique des Champs	52
5.2.2	Matrice de masse et courants neutres	53
5.3	Transformations unitaires des fermions de saveur	55
5.3.1	Transformations unitaires générales	55
5.3.2	Rotations de saveur	57
5.3.3	Alignement des états propres de saveur et de masse	58
	Conclusion	59
II	Fermions et symétries discrètes en Théorie Quantique des Champs	61
6	Préliminaires	65
6.1	Notations	65
6.2	Spineurs de Weyl et de Dirac	66
6.3	Equation de Dirac	67
7	Symétries discrètes	69
7.1	Symétries	69
7.2	Parité	71
7.2.1	Fonctions grassmanniennes	71
7.2.2	Opérateurs	71
7.3	Conjugaison de charge	71
7.3.1	Fonctions grassmanniennes	72
7.3.2	Opérateurs	72
7.3.3	Transformation PC	73
7.4	Renversement du temps	73
7.4.1	Fonctions grassmanniennes	73
7.4.2	Opérateurs	74
7.5	Transformation PCT	75
7.5.1	Fonctions grassmanniennes	75
7.5.2	Opérateurs	76
7.6	Fermions de masse nulle	76
7.7	Fermions de Majorana	77
8	Lagrangien classique pour une particule	79
8.1	Construction du Lagrangien	79
8.1.1	Termes cinétiques	79
8.1.2	Termes de masse	80
8.1.3	Résumé	80
8.2	Contraintes PCT sur le Lagrangien	81
8.3	Contraintes internes	82

8.4	Contraintes données par C	83
9	Propagateur pour une génération	85
9.1	Le propagateur fermionique	85
9.2	Contraintes \mathcal{PCT} sur le propagateur	86
9.2.1	Contraintes	86
9.2.2	Propagateur invariant sous \mathcal{PCT}	88
9.3	Contraintes données par \mathcal{C}	90
9.4	Contraintes données par \mathcal{P}	90
9.5	Contraintes données par \mathcal{CP}	91
9.6	Diagonalisation du propagateur invariant sous \mathcal{C}	91
	Conclusion	95
	Bibliographie	97
A	$\tilde{\theta}_{13} = 0 \Rightarrow \theta_{13} = 0$	101
B	Solutions $(\theta_{12}, \theta_{23})$ des équations (3.37a) à (3.37e) dans le cas $\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$	103
C	Courants chargés et "base de saveur renormalisée"	105
D	Articles	107
D.1	Mixing angles of quarks and leptons in quantum field theory	107
D.2	Fermions and discrete symmetries in quantum field theory I. Generalities ; the propagator for one flavor	153

Introduction

La Théorie Quantique des Champs (TQC) [1, 2], née de la volonté d'unifier les deux révolutions majeures de la Physique du début du vingtième siècle que sont la Mécanique Quantique et la Relativité Restreinte, est la théorie physique présentant à ce jour la description de la Nature la plus achevée, sinon en termes de perfection du formalisme, du moins en raison de son éclatante correspondance avec le réel, éprouvée depuis plusieurs dizaines d'années dans les accélérateurs de particules. Le Modèle Standard [2, 3] dont elle constitue le fondement mathématique est ainsi confirmé expérimentalement à des précisions inégalées dans l'histoire de la Physique. Malgré la profusion de théories concurrentes cherchant "au-delà du Modèle Standard" à pallier aux manques tout relatifs de ce dernier (en particulier à réaliser l'inclusion de la gravité pour aboutir à une théorie unifiée des quatre interactions fondamentales), mais dont le principal défaut est l'absence de toute confirmation expérimentale, ce dernier constitue encore aujourd'hui le paradigme actuel de référence pour la description des constituants fondamentaux de la matière que sont les fermions, et de leurs interactions (hormis la gravité) véhiculées par les bosons.

Notre thèse réunit des travaux consacrés à divers aspects de l'étude des fermions en Théorie Quantique des Champs. Elle se compose de deux parties largement indépendantes, bien qu'ayant vocation *in fine* à se rejoindre l'une l'autre, correspondant aux deux directions principales selon lesquelles s'est structurée notre recherche autour de cette thématique générale.

La première partie, d'orientation plus phénoménologique, est consacrée aux angles de mélange des fermions en TQC. L'origine du phénomène de mélange se trouve dans le fait que les états fermioniques présents dans les interactions, c'est à dire se transformant de manière déterminée sous les groupes de jauge associés, ne possèdent pas de masse définie. En d'autres termes, les états propres d'interaction ne coïncident pas avec les états propres de masse, mais forment une superposition de ces derniers. Celle-ci est décrite par une matrice de mélange qui, dans le cadre du Modèle Standard, est définie comme unitaire. Nous montrons dans cette partie que les principes fondamentaux de la TQC impliquent de manière générale que la matrice de mélange d'un système non dégénéré de fermions en interaction n'est *a priori* pas unitaire. Puis, à partir de cette proposition fondamentale, nous mettons en évidence une structure particulière des courants neutres dans la base des états de saveur réalisée par les angles de mélange des quarks et des leptons observés dans la nature, et caractérisée par l'égalité des violations de l'universalité des courants neutres et de l'absence de tels courants changeant la saveur occasionnées par la déviation de l'unitarité de la matrice de mélange.

La seconde partie de notre thèse présente quand à elle les premiers résultats d'un travail encore inachevé, consacré, dans la ligne de celui réalisé par Machet *et al.* [4] sur les mésons neutres, à l'étude exhaustive des contraintes engendrées en TQC sur le Lagrangien et le propagateur des fermions par les symétries discrètes que sont la parité P , la conjugaison de charge C , et le renversement du temps T , d'où par conséquent la nature

des états fermioniques correspondants. Nous construisons sur la base des spineurs de Weyl le Lagrangien puis le propagateur quadratiques les plus généraux compatibles avec l'invariance de Lorentz, et vérifions que ceux-ci sont naturellement invariants sous le produit PCT . Puis nous montrons que les états propres d'un propagateur invariant sous C sont des fermions de Majorana.

Première partie

Angles de mélange des quarks et des leptons en Théorie Quantique des Champs

Depuis la découverte du fait que les états propres des interactions faibles ne coïncident pas avec les états physiques de masse et de durée de vie bien définies, mais s'écrivent comme une superposition de ces derniers, les tentatives visant à donner une explication aux valeurs des angles de mélange observés dans la nature ont donné lieu à de nombreux travaux. Ainsi Weinberg [5] proposa de relier le sinus de l'angle de Cabibbo au rapport des masses des quarks d et s , mais cette tentative n'ayant d'autre fondement qu'empirique, demeura insatisfaisante. La question fit l'objet d'un intérêt encore croissant suite à la découverte des oscillations de neutrinos, et des grands angles de mélange qu'elles révélaient chez ces derniers. La plupart des modèles proposés à ce jour impliquent la recherche de symétries dans les familles de particules de manière à contraindre la matrice de masse à adopter des formes déterminées, ou "textures", permettant de retrouver les configurations d'angles de mélange mesurées expérimentalement chez les quarks et les leptons [6, 7, 8, 9].

Nous proposons dans la première partie de cette thèse une approche originale de cette question fondée sur une structure particulière des courants neutres liée à la non unitarité de la matrice de mélange. Celle-ci a pour avantage de ne reposer que sur les bases théoriques du Modèle Standard, là où nombre de voies explorées invoquent la physique au-delà du Modèle Standard pour justifier par exemple certaines textures de matrices de masse (ainsi [10]). D'autre part, cette démarche nous permet d'éviter le recours aux textures, qui présentent un double inconvénient : non seulement une matrice de masse unique et constante constitue seulement une approximation pour décrire les systèmes couplés en TQC [11], mais les configurations particulières de cette dernière que constituent les textures (caractérisées notamment par la présence d'un certain nombre de zéros) sont de plus instables sous des transformations unitaires des fermions et ne peuvent représenter de vraies propriétés physiques des systèmes considérés [12].

Après un rappel préliminaire des principaux traits du Modèle Standard faisant l'objet du premier chapitre, nous montrons sur la base d'arguments généraux de TQC que la base des états propres de masse d'un système non-dégénéré de fermions en interaction n'a aucune raison d'être orthonormale, et que la matrice de mélange reliant cette dernière à la base des états propres de saveur ne peut pas être considérée *a priori* comme unitaire. Le chapitre 3 expose le corps de notre démarche. Commencant par deux générations, nous paramétrons une matrice de mélange générique avec deux angles de mélange au lieu d'un seul. La propriété du Lagrangien des courants neutres, fondée expérimentalement, d'être déterminé par la matrice identité dans la base des états propres de masse, ne se transporte pas directement dans la base des états propres de saveur. En nous plaçant dans un petit voisinage, que nous définissons, nous montrons que la configuration particulière des courants neutres dans la base des états propres de saveur dans laquelle l'universalité et l'absence des courants changeant la saveur sont violées avec la même amplitude confère à l'angle de mélange autour duquel est paramétré notre voisinage la valeur de l'angle de Cabibbo déterminée expérimentalement. Puis nous passons au cas le plus général de trois familles de fermions, et montrons que la même structure des courants neutres est réalisée par les angles de mélange des quarks comme des neutrinos.

Dans le chapitre 4, nous retrouvons les résultats des chapitres précédents sur la matrice de mélange à partir de considérations perturbatives. Nous montrons dans le cas de deux générations que l'introduction de contre-termes finis pour annuler les transitions non diagonales apparaissant à une boucle entre différents états propres de masse conduit par la diagonalisation du Lagrangien à définir une nouvelle base d'états propres de masse renormalisés, qui est non orthonormale. Nous obtenons de cette façon le paramétrage de la matrice de mélange au voisinage du cas unitaire utilisé au chapitre 3, le paramètre

de déviation de l'unitarité étant constitué par le coefficient du contre-terme ajouté au Lagrangien. Néanmoins, nous montrons que la symétrie de jauge permet de préserver l'unitarité de la matrice de Cabibbo apparaissant dans les courants chargés exprimés dans la base de masse renormalisée.

Enfin, nous consacrons le dernier chapitre à l'étude, dans le cas de deux familles, des transformations unitaires pertinentes dans le cadre de notre approche. Nous mettons en évidence la présence de symétries reliées à la structure particulière des courants neutres mise en évidence par les configurations des angles de mélange des quarks et des leptons observées dans la nature. Nous cherchons ensuite à établir un lien entre notre démarche fondée sur les courants neutres, et les approches les plus communément suivies fondées la plupart du temps sur la recherche de symétries de la matrice de masse. Puis nous considérons pour finir les transformations unitaires sur les fermions de saveur dans le cadre de l'approche perturbative exposée au chapitre 4, et nous montrons qu'il est toujours possible d'aligner dans l'un des secteurs d'isospin donné la base de masse sur la base de saveur, de manière telle que cela préserve la structure des courants chargés, justifiant en cela d'une manière nouvelle l'identification implicitement réalisée dans l'approche standard entre la matrice de mélange de l'un des secteurs et le produit des matrices de chaque secteur apparaissant dans les courants chargés.

Chapitre 1

Le mélange de fermions dans le Modèle Standard

Dans cette partie, nous esquissons à grands traits une présentation du Modèle Standard de la physique des particules (voir les références [2, 3]).

1.1 Le Modèle Standard : bref survol

Le modèle standard est la théorie décrivant, avec une précision inégalée à ce jour, les particules fondamentales et leurs interactions, à l'exception de la gravité. Il consiste en une théorie quantique des champs renormalisable fondée sur une invariance de jauge locale de groupe de jauge $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. On peut le décomposer en deux secteurs : la Chromodynamique Quantique, construite sur le groupe $SU(3)_C$, décrivant les interactions fortes entre particules colorées (quarks et les gluons) ; et la Théorie Électrofaible, fondée sur le groupe $SU(2)_L \times U(1)_Y$, qui décrit de manière unifiée les interactions faible et électromagnétique. Notre travail se situe exclusivement dans le cadre de cette dernière.

Les champs du Modèle Standard se répartissent en deux catégories : bosons et fermions. Les bosons de jauge, qui sont les médiateurs des interactions, appartiennent à la représentation adjointe du groupe de jauge associé : gluons pour l'interaction forte, bosons W^\pm et Z^0 vecteurs de l'interaction faible, et photon γ responsable de l'interaction électromagnétique. Ce sont des particules de spin entier, dont la distribution statistique est décrite par la statistique de Bose-Einstein. Les fermions quand à eux sont les champs de matière dont les interactions sont décrites *via* les bosons de jauge. Ce sont des particules de spin demi-entier obéissant à la statistique de Fermi-Dirac.

1.1.1 Bosons

Le secteur électrofaible $SU(2)_L \times U(1)_Y$ du Modèle Standard contient quatre bosons de jauge : ce sont les trois champs vectoriels non massifs A_μ^i et le champ vectoriel B_μ associés respectivement aux générateurs du groupe de jauge $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$. Tous ces champs sont primitivement non massifs, en raison du fait que les termes quadratiques du type $A^{i\mu}A_\mu^j$ ou $B^\mu B_\mu$ ne sont pas invariants sous une transformation de jauge. Le couplage de ces bosons de jauge à un champ de matière est réalisé par la dérivée covariante. Celle-ci s'écrit, pour un champ fermionique appartenant à une représentation générale du groupe

$SU(2)_L$, et de charge $U(1)$ (ou hypercharge) Y , sous la forme

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - ig A_\mu^i T^i - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \right) \psi \quad (1.1)$$

où les T^i sont les générateurs du groupe $SU(2)$, correspondant aux matrices de Pauli dans la représentation de définition : $T^i = \frac{\sigma^i}{2}$. Le couplage ainsi réalisé est déterminé par les seules propriétés de transformation du champ fermionique sous les groupes de symétrie des interactions. Cette caractéristique est à l'origine de la propriété d'universalité des couplages dont nous parlerons plus loin.

L'attribution d'une masse aux bosons de jauge requiert l'introduction d'un champ supplémentaire, doublet scalaire de $SU(2)_L$ d'hypercharge $Y(\Phi) = 1$: le champ de Higgs $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$, dont la valeur moyenne dans le vide

$$\langle \Phi \rangle_0 \equiv \langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

entraîne la brisure spontanée de la symétrie de jauge

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\langle \Phi \rangle_0} U(1)_{em}. \quad (1.3)$$

A l'issue de celle-ci, le terme cinétique $D^\mu \Phi^\dagger D_\mu \Phi$, construit à partir de la dérivée covariante

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - ig A_\mu^i T^i - i \frac{1}{2} g' B_\mu \right) \Phi \quad (1.4)$$

et évalué à la valeur moyenne dans le vide (1.2), fait apparaître des termes de masse pour les bosons de jauge. On obtient de la sorte quatre bosons de jauge de masses définies, s'exprimant comme des combinaisons linéaires des champs primitifs : trois bosons massifs

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \mp i A_\mu^2) \quad \text{de masse} \quad m_W^2 = \frac{g^2 v^2}{4} \quad (1.5)$$

$$Z^0 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g A_\mu^3 - g' B_\mu) \quad \text{de masse} \quad m_Z^2 = (g^2 + g'^2) \frac{v^2}{4} \quad (1.6)$$

et un quatrième conservant une masse nulle,

$$A_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g' A_\mu^3 + g B_\mu) \quad \text{de masse} \quad m_A = 0. \quad (1.7)$$

Ce dernier est associée à la symétrie résiduelle $U(1)_{em}$ subsistant après la brisure, et correspond au boson vecteur de l'interaction électromagnétique, le photon. La transformation reliant les bosons de jauge neutres (Z_μ^0, A_μ) aux champs (A_μ^3, B_μ) est orthogonale :

$$\begin{pmatrix} Z_\mu^0 \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_w & -\sin \theta_w \\ \sin \theta_w & \cos \theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

L'angle de rotation θ_w , appelé *angle de Weinberg*, vérifie les relations

$$\cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (1.9)$$

En terme des champs bosoniques états propres de masse, la dérivée covariante devient

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu^0 (g^2 T^3 - g'^2 Y) - i \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu (T^3 + Y). \quad (1.10)$$

où $T^\pm = (T^1 \pm iT^2) = \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2)$. Le générateur de l'interaction électromagnétique associée à la symétrie non brisée $U(1)_{em}$, et couplé au boson de jauge A_μ correspondant, se reconnaît dans le dernier terme du membre de droite. On identifie ainsi l'opérateur de charge électromagnétique, dont la valeur propre est le nombre quantique de même nom :

$$Q = \frac{Y}{2} + T_3. \quad (1.11)$$

En utilisant les relations (1.9), on donne finalement à la dérivée covariante sa forme suivante :

$$D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i \frac{g}{\cos \theta_w} Z_\mu^0 (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) - ie A_\mu Q. \quad (1.12)$$

Dans cette expression, les deuxième et troisième termes du membre de droite correspondent respectivement aux interactions faibles à courants chargés et à courants neutres ; le dernier terme décrit l'interaction électromagnétique.

1.1.2 Fermions

Les interactions faibles ont la particularité de violer de manière maximale la parité : seuls les champs de chiralité gauche sont présents dans les courants faibles et interagissent avec les bosons de jauge correspondants. Les champs de chiralité gauche et droite sont donc indépendants, et forment respectivement des singlets et des doublets du groupe de jauge $SU(2)_L$. Il s'ensuit que les degrés de liberté dynamiques fondamentaux pour les fermions sont les champs de Weyl à deux composantes, de chiralité définie, qui réalisent des représentations irréductibles du groupe de Lorentz propre orthochrone L_+^\uparrow (cf. § 6.2).

D'autre part le contenu fermionique du Modèle Standard présente une structure répétitive, correspondant à la duplication d'un même ensemble de cinq représentations différentes du groupe de jauge fondamental. Les champs de matière se regroupent ainsi en trois générations, chacune d'entre elles étant constituée de 15 fermions à deux composantes

$$e_{iL}, \nu_{iL}, e_{iR}, u_{iL}, u_{iR}, d_{iL}, d_{iR} \quad (1.13)$$

(i étant l'indice de famille, les indices de couleur pour les champs des quarks étant sous-entendus), dont la répartition en termes de multiplets du groupe fondamental $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ est présentée dans le tableau 1.1.

Du fait que les champs fermioniques de chiralité gauche et droite appartiennent à des représentations différentes du groupe de jauge $SU(2)_L$, les termes de masse ordinaire $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$ violent l'invariance de jauge et ne peuvent pas être inclus dans le Lagrangien. La symétrie de jauge contraint ainsi les fermions à demeurer non massifs. Comme pour les bosons, ce problème est résolu par la brisure spontanée de symétrie réalisée par la valeur moyenne dans le vide du champ de Higgs. Celui-ci permet d'écrire de nouveaux termes d'interaction scalaire-fermion-fermion invariants sous le groupe de jauge, les termes de couplage de Yukawa :

$$(\lambda_d)_{ij} \bar{Q}_{iL} \Phi d_{jR} + (\lambda_u)_{ij} \epsilon^{ab} \bar{Q}_{iLa} \Phi_b^* u_{jR} + (\lambda_e)_{ij} \bar{L}_{iL} \Phi e_{jR}. \quad (1.14)$$

$L_L(1, 2, -1)$	$Q_L(3, 2, 1/3)$	$(1, 1, -2)$	$(3, 1, 4/3)$	$(3, 1, -2/3)$
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	e_R	u_R	d_R
$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	μ_R	c_R	s_R
$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	τ_R	t_R	b_R

TAB. 1.1 – Champs fermioniques du Modèle Standard.

(ϵ^{ab} étant le tenseur 2×2 antisymétrique). Suite à la brisure spontanée de la symétrie de jauge, ces derniers prennent la forme

$$\bar{d}_{iL} (M_d)_{ij} d_{jR} + \bar{u}_{iL} (M_u)_{ij} u_{jR} + \bar{e}_{iL} (M_e)_{ij} e_{jR}, \quad (1.15)$$

où les matrices

$$M_\alpha = \frac{v}{\sqrt{2}} \lambda_\alpha \quad (1.16)$$

sont les matrices de masse pour chaque "secteur" α regroupant les particules de même isospin (quarks de type u ou d , leptons chargés ou neutrinos). Ces matrices sont définies dans une base de champs fermioniques qui, comme nous l'avons vu, réalisent des représentations définies du groupe de jauge qui déterminent leurs transformations dans les interactions associées : la base des états propres de saveur. Elles n'ont aucune raison d'être diagonales, et mélangent de ce fait, au sein de chaque secteur, les différentes générations de fermions. Dans le formalisme traditionnel du Modèle Standard, les matrices de masse (1.16) sont diagonalisées au moyen de transformations bi-unitaires : ainsi dans le cas des quarks de type u

$$K_u^\dagger M_u L_u = D_u. \quad (1.17)$$

Les masses des fermions sont alors données par les éléments de la matrice diagonale D . Quant aux matrices unitaires K et L réalisant la diagonalisation, elles sont les matrices de mélange permettant de relier les champs primitifs du Lagrangien, qui sont les états propres de saveur, aux champs physiques, qui diagonalisent la matrice de masse et sont ainsi définis comme les états propres de masse :

$$u_L = K_u u_{mL} \quad \text{et} \quad u_R = L_u u_{mR} \quad (1.18)$$

Les courants chargés prennent quand à eux dans la base des états propres de masse une forme non-diagonale

$$J^{\mu+} = \bar{u}_L \gamma^\mu d_L = \bar{u}_{mL} \gamma^\mu (K_u^\dagger K_d) d_{mL}. \quad (1.19)$$

La matrice unitaire ($K_u^\dagger K_d$) relie, dans les interactions faibles à courants chargés, les quarks physiques de type u et de type d . Elle est connue sous le nom de matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) [13, 14].

1.2 Le problème des masses des neutrinos

Le même courant chargé s'écrit pour les leptons, de manière similaire à (1.19),

$$J^{\mu+} = \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L = \bar{\nu}_{mL} \gamma^\mu (K_\nu^\dagger K_e) e_{mL}. \quad (1.20)$$

Or dans le strict cadre du Modèle Standard, les neutrinos ont une masse nulle. De ce fait, leurs états propres de masse étant dégénérés, leur base est définie à une rotation près et peut absorber dans une simple redéfinition le produit $K_\nu^\dagger K_e$, qui disparaît ainsi complètement de la théorie sans donner lieu à un mélange observable dans l'interaction véhiculée par le courant (1.20).

Cependant, nous savons aujourd'hui depuis la découverte du phénomène d'oscillation des neutrinos, que la masse de ceux-ci, si elle est sans doute très petite, n'est néanmoins pas nulle. Les champs des neutrinos ν_{iL} du Modèle Standard, de chiralité gauche, possèdent donc un partenaire de chiralité droite. L'extension la plus simple du Modèle Standard permettant de rendre compte du caractère massif des neutrinos inclut donc les champs supplémentaires ν_{iR} , qui sont des singlets du groupe de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ et n'ont de ce fait aucune interaction avec leur environnement¹. Ces champs permettent d'écrire le terme d'interaction de Yukawa suivant :

$$(\lambda_\nu)_{ij} \epsilon^{ij} \bar{L}_{iL} \Phi^* \nu_{jR}, \quad (1.21)$$

qui génère après la brisure spontanée de la symétrie de jauge le terme de masse de Dirac

$$(M_\nu^D)_{ij} \bar{\nu}_{iL} \nu_{jR}. \quad (1.22)$$

Il est possible d'écrire également un second type de terme, le terme de masse de Majorana

$$\frac{1}{2} (M_\nu^M)_{ij} \bar{\nu}_{iR} \nu_{jR}^c. \quad (1.23)$$

A la différence du précédent, ce terme ne peut pas être généré par des interactions de Yukawa renormalisables du type de celles que nous avons vues. De plus, il brise la conservation du nombre leptonique, qui est l'une des symétries accidentelles du Modèle Standard, de deux unités. Pour cette raison, il ne peut être autorisé que si les neutrinos ne portent pas de charge conservée supplémentaire.

La combinaison des deux types de masses, réécrites de manière synthétique comme

$$\frac{1}{2} \bar{\vec{\nu}}^c M_\nu \vec{\nu}, \quad M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & M_\nu^D \\ (M_\nu^D)^T & M_\nu^M \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

est à la base du mécanisme de *see-saw* (dans le cas $M^M \gg M^D$), qui à travers ses nombreuses variantes est actuellement le plus couramment invoqué pour expliquer la remarquable petitesse des masses des neutrinos (pour une présentation de *see-saw* et de l'état actuel des connaissances sur la phénoménologie des neutrinos massifs, voir [15] et les références à l'intérieur).

Dans le cas, donc, où les neutrinos sont massifs et non-dégénérés (ce qui est la situation effectivement réalisée dans la nature), la matrice unitaire $K_\nu^\dagger K_e$ apparaissant dans le

¹Ils sont appelés pour cette raison neutrinos "stériles", bien que cette dénomination puisse englober plus largement d'autres champs supplémentaires de neutrinos

courant chargé (1.20) des leptons ne peut pas disparaître dans une redéfinition de la base de masse. Comme la matrice CKM pour les quarks, elle caractérise le couplage des neutrinos et des leptons chargés physiques (états propres de masse) dans les interactions faibles à courants chargés. Elle est connue sous le nom de matrice de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) [16, 17].

Dans la suite de notre travail sur les angles de mélange des fermions (et en particulier des leptons), nous supposons bien sûr comme acquis le caractère massif des neutrinos, aujourd'hui solidement établi, mais sans nous préoccuper de la nature de leurs masses. En revanche, le travail dont nous présentons les premiers résultats dans la deuxième partie de notre thèse trouve l'une de ses motivations dans la volonté de déterminer, sur des bases théoriques rigoureuses de Théorie Quantique des Champs, la nature exacte des neutrinos, particules de Dirac ou Majorana.

D'autre part, nous passerons sous silence la question de l'origine de ces masses, et les éventuels ingrédients de "nouvelle physique" susceptibles de lui apporter une réponse, nous limitant à intégrer de manière minimale le strict fait du caractère massif des neutrinos. Pour cette raison, nous nous situons dans le cadre du Modèle Standard, bien qu'il s'agisse de sa version "élargie" aux masses des neutrinos.

1.3 Conclusion : les différentes bases fermioniques

Au terme de ce parcours vue d'ensemble du Modèle Standard, résumons la situation. Les fermions forment des systèmes couplés décrits par deux bases indépendantes, dont la dissociation est la conséquence directe de leurs interactions :

- La base des états propres de saveur, qui se transforment de façon définie sous le groupe de jauge de l'interaction électrofaible. Ils seront notés dans la suite par l'indice f (*flavour*).
- La base des états propres de masse, qui diagonalisent la matrice de masse. Ce sont les champs physiques, qui se propagent, et appartiennent à des représentations définies du groupe de Lorentz propre orthochrone. Ils seront désignés dans la suite par l'indice m .

Dans le cas des leptons, une troisième base apparaît, constituée ni plus ni moins des neutrinos "leptoniques", c'est à dire les neutrinos électronique ν_e , muonique ν_μ et neutrino τ généralement confondus dans la littérature (voir par exemple [3]) avec les neutrinos de saveur définis comme les états propres de l'interaction faible. Ecrivons en effet le Lagrangien des courants chargés leptoniques dans la base des états propres de masse :

$$\mathcal{L}_{c.c} = \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu W_\mu^- \left(\overline{\begin{pmatrix} e_f \\ \mu_f \\ \tau_f \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \nu_{ef} \\ \nu_{\mu f} \\ \nu_{\tau f} \end{pmatrix} \right) + h.c. = \frac{g}{\sqrt{2}} \gamma^\mu W_\mu^- \left(\overline{\begin{pmatrix} e_m \\ \mu_m \\ \tau_m \end{pmatrix}} K_\ell^\dagger K_\nu \begin{pmatrix} \nu_{em} \\ \nu_{\mu m} \\ \nu_{\tau m} \end{pmatrix} \right) + h.c. \quad (1.25)$$

Le neutrino leptonique ν_ℓ est défini comme le neutrino produit, dans un processus d'interaction faible à courants chargés, avec le lepton chargé ℓ^+ ou à partir du lepton ℓ^- , ou bien enfin comme le neutrino détecté dans un processus d'interaction faible à courants chargés à travers la production d'un lepton chargé ℓ^- dans l'état final. En d'autres termes, le neutrino leptonique correspond au neutrino mesuré expérimentalement par l'identification du lepton chargé associé dans un processus d'interaction faible à courants chargés [18].

Or les leptons détectés expérimentalement sont toujours des états propres de masse. En conséquence, les neutrinos leptoniques sont définis, en vertu de l'équation (1.25), comme

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = K_\ell^\dagger K_\nu \begin{pmatrix} \nu_{em} \\ \nu_{\mu m} \\ \nu_{\tau m} \end{pmatrix} = K_\ell^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{ef} \\ \nu_{\mu f} \\ \nu_{\tau f} \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Du point de vue théorique, donc, les neutrinos électronique, muonique et τ sont différents des neutrinos de saveur définis comme les neutrinos se transformant de façon déterminée sous le groupe de jauge des interactions faibles.

Néanmoins, il est aujourd'hui admis généralement que dans le cas des leptons chargés, les états propres de saveur s'identifient aux états propres de masse. En effet, les leptons chargés sont détectés expérimentalement à travers les interactions électromagnétiques, qui sont insensibles à la saveur. La seule propriété qui permette de les distinguer, que ce soit de manière cinématique ou à travers leurs produits de désintégration, est donc leur masse. Les leptons chargés étant donc définis en tant qu'états propres de masse, la saveur est mesurée pour eux à travers la masse. En d'autres termes, saveur et masse coïncident [19]. Cette caractéristique est également analysée sous un angle différent par [20], qui montre l'impossibilité de détecter une superposition cohérente d'états propres de masse, c'est à dire l'absence d'oscillations pour les leptons chargés (voir aussi [21, 22]).

Le consensus actuel est donc de considérer $K_\ell = \mathbb{1}$, auquel cas le produit $K_\ell^\dagger K_\nu$ se réduit à la matrice de mélange K_ν des neutrinos, et les neutrinos leptoniques s'identifient aux neutrinos de saveur.

Chapitre 2

Systèmes de fermions couplés non-dégénérés en Théorie Quantique des Champs

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'ensemble des fermions connus à ce jour et décrits par le Modèle Standard, forme un système de particules couplées non-dégénérées, c'est à dire de masses distinctes, dont les matrices de mélange sont unitaires par construction. Nous montrons maintenant à partir de considérations générales de Théorie Quantique des Champs que la base des états propres de masse d'un tel système n'a aucune raison d'être orthonormale. Par conséquent, la matrice de mélange reliant cette dernière à la base des états propres de saveur ne peut pas être considérée *a priori* comme unitaire.

2.1 Etats propres de masse

Dans le formalisme canonique de TQC, le Lagrangien est écrit en termes d'entités (champs et constantes) "nues", infinies et non physiques. Après le calcul des corrections radiatives apparaissant à partir du premier ordre dans l'approche perturbative, on obtient les champs et paramètres physiques, renormalisés, définis à partir des champs "nus" par des corrections infinies (suppression des divergences ultraviolettes) et finies. A l'issue de cette procédure de renormalisation, les paramètres et grandeurs physiques du Lagrangien dépendent de l'échelle d'énergie considérée. Cette dépendance d'échelle est décrite par les équations de groupe de renormalisation (pour plus de détails, voir par exemple [2]).

En particulier le propagateur fermionique acquiert du fait des corrections radiatives une dépendance dans l'impulsion p . Si à l'ordre de l'arbre il correspond bien au propagateur libre $\frac{i}{\not{p}-m_0}$ (m_0 étant la masse "nue", non renormalisée), il inclut aux ordres supérieurs dans la constante de couplage e des contributions décrites par la fonction de self-énergie $-i\Sigma(p)$. Cette fonction est égale à la somme de tous les diagrammes 1PI¹ (une-particule-irréductible) comportant une ligne fermionique entrante et une ligne fermionique sortante portant une impulsion p (tous ces diagrammes étant amputés des propagateurs correspondant aux lignes externes). A l'ordre d'une boucle dans le développement perturbatif (e^2), elle correspond au diagramme suivant :

¹Un diagramme 1PI est un graphe que l'on ne peut couper en deux en supprimant une seule ligne interne.

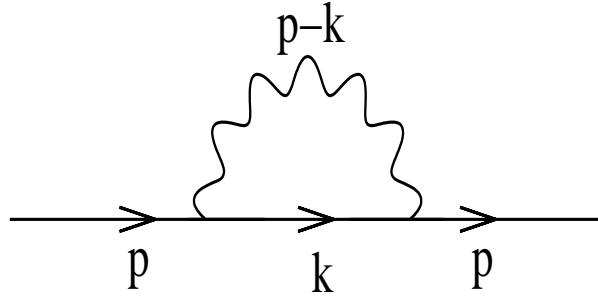


Fig.1 : Diagramme à une boucle de la fonction de self-énergie

Le propagateur fermionique complet dans l'espace des impulsions $S(p)$, donné par la transformée de Fourier de la fonction à deux points $\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \equiv S_F(x-y)$, est égal à la somme de toutes les insertions de la fonction de self-énergie entre deux lignes fermioniques. Cette somme se simplifiant comme celle d'une série géométrique en $-i\Sigma(p)$, il s'exprime sous la forme suivante :

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)}, \quad (2.1)$$

Considérons maintenant un système de n fermions couplés de masses $m_i (i = 1 \dots n)$ deux à deux distinctes : $m_i \neq m_j$ pour $i \neq j$. Le propagateur $S(p)$ et la fonction de self-énergie $\Sigma(p)$ sont des matrices $n \times n$. Le propagateur peut encore s'écrire comme

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - M(p)} \quad (2.2)$$

en définissant $M(p) = m_0 + \Sigma(p)$ comme la matrice de masse renormalisée. Les masses physiques $p_i^2 = m_i^2$ du système sont définies comme les pôles du propagateur complet $S(p)$:

$$\det S^{-1}(p) \Big|_{p=p_i} = 0 \quad (2.3)$$

Les masses ainsi définies sont indépendantes de la procédure de renormalisation. De l'expression du propagateur (2.2), il s'ensuit directement qu'elles sont également les valeurs propres de la matrice $M(p)$:

$$\det (\not{p} - M(p)) \Big|_{p=p_i} = 0, \quad (2.4)$$

ou bien identiquement celles de l'opérateur Lagrangien quadratique renormalisé $L^{(2)}(p)$, qui s'écrit comme l'inverse du propagateur :

$$\det L^{(2)}(p) \Big|_{p=p_i} = 0. \quad (2.5)$$

Le Lagrangien $L^{(2)}(p)$ est une matrice $n \times n$ hermitienne. Il admet donc, quelle que soit l'impulsion p , un ensemble de n valeurs propres $\lambda_\alpha(p)$, supposées non dégénérées, auquel sont associés n vecteurs propres $\psi_{\alpha=1\dots n}^\alpha(p)$. Ceux-ci forment, du fait de l'hermiticité du Lagrangien, une base orthonormale.

Considérons en particulier une impulsion p_i donnée quelconque correspondant à l'un des n pôles du propagateur. En vertu de (2.5), l'une des valeurs propres de $L_2(p_i)$ est

nulle ; par convention nous choisirons précisément la i -ème, de sorte que $\lambda_i(p_i) = 0$. L'état propre correspondant $\varphi_m^i \equiv \psi^i(p_i)$ est un état propre de masse. Il vérifie par définition :

$$L^{(2)}(p = p_i) \varphi_m^i = 0. \quad (2.6)$$

Les n vecteurs propres du Lagrangien $L^{(2)}(p_i)$ se composent donc de l'état propre de masse φ_m^i ainsi que de $n - 1$ autres vecteurs propres, notés $\omega_i^{\alpha, (\alpha \neq i)}$, correspondant aux valeurs propres non nulles $\lambda_\alpha(p_i)$ de $L^{(2)}(p_i)$. Ces derniers représentent des états non physiques, situés hors couche de masse, et qui ne se propagent pas. L'ensemble de ces états forme comme nous l'avons dit une base orthonormale :

$$\langle \varphi_m^i | \varphi_m^i \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle \varphi_m^i | \omega_i^\alpha, \alpha \neq i \rangle = 0. \quad (2.7)$$

Les n états propres de masse ($\varphi_m^i, i = 1 \cdots n$), qui sont les vecteurs propres correspondants, pour chaque $p = p_i$, à la valeur propre nulle du lagrangien, appartiennent donc chacun respectivement à n bases orthonormales distinctes : les n bases de vecteurs propres du lagrangien $L^{(2)}(p)$ pour chaque $p = p_i$. Ils n'ont donc *a priori* aucune raison d'être orthogonaux entre eux :

$$\langle \varphi_m^i | \varphi_m^k \rangle \neq 0, \quad i \neq k. \quad (2.8)$$

Ainsi, les états propres de masse ne forment pas, de manière générale en Théorie Quantique des Champs, une base orthonormale.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, les fermions sont, dans le cadre du Modèle Standard, des systèmes mélangés décrits par deux bases distinctes : la base des états propres de saveur Ψ_f , et celle des états propres de masse Ψ_m . Ces deux bases sont reliées par une matrice de mélange K définie de la façon suivante :

$$\Psi_f = K \Psi_m. \quad (2.9)$$

Or, comme nous avons montré que la base des états propres de masse n'est pas orthonormale, il s'ensuit que la matrice de mélange, reliant la base des états propres de saveur à une base non orthonormale, ne peut pas être considérée comme unitaire :

$$K^\dagger K \neq 1. \quad (2.10)$$

2.2 Cas d'un système à deux particules

Le système le plus simple composé de 2 particules (de masses m_1 et m_2) est illustré par la figure 2.

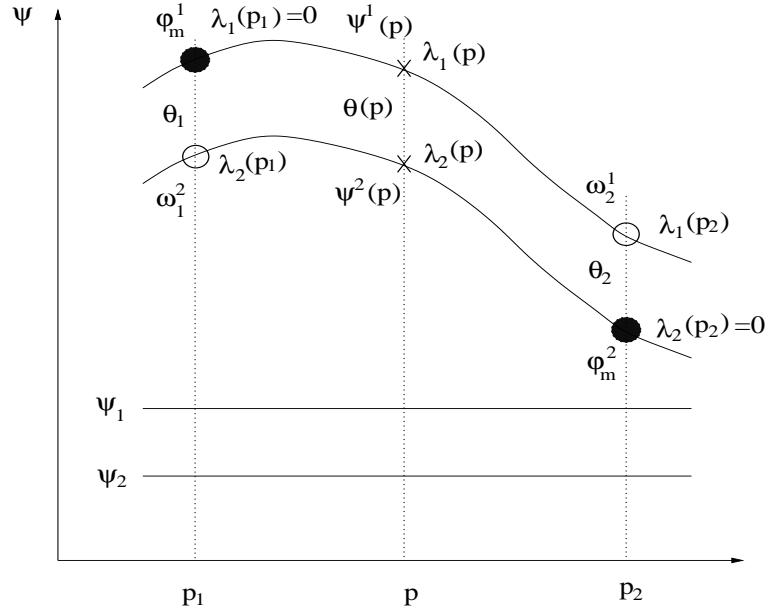


Fig. 2 : Etats propres d'un système binaire couplé

La base des états propres de saveur (ψ_{1f}, ψ_{2f}) , indépendante de p , est représentée par les deux lignes horizontales inférieures. Les deux états propres du Lagrangien renormalisé $L^{(2)}(p)$ forment une base orthonormale $(\psi_1(p), \psi_2(p))$ dépendant de p . Lorsque p varie, celle-ci décrit un ensemble continu de bases orthonormales représenté par les deux courbes supérieures. Pour chaque valeur de p , la base orthonormale $(\psi_1(p), \psi_2(p))$ est reliée à la base de saveur par une matrice unitaire $K(p)$ paramétrée par l'angle $\theta(p)$:

$$\begin{pmatrix} \psi_{1f} \\ \psi_{2f} \end{pmatrix} = K(p) \begin{pmatrix} \psi_1(p) \\ \psi_2(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(p) & \sin \theta(p) \\ -\sin \theta(p) & \cos \theta(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(p) \\ \psi_2(p) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

En particulier, la base orthonormale à $p_1 = m_1$ (resp. $p_2 = m_2$) est formée des états φ_m^1 et ω_1^2 (resp. φ_m^2 et ω_2^1). Ces deux bases sont reliées à la base des états propres de saveur par deux matrices unitaires d'angles respectifs θ_1 et θ_2 . En revanche, $(\varphi_m^1, \varphi_m^2)$ ne constitue pas *a priori* une base orthonormale.

La matrice de mélange K définie par

$$\begin{pmatrix} \psi_{1f} \\ \psi_{2f} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \varphi_m^1 \\ \varphi_m^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

est reliée aux matrices $K(p_i)$ ($i = 1 \dots 2$) de la manière suivante :

$$K = \frac{1}{K_{22}(p_1)K_{11}(p_2) - K_{12}(p_1)K_{21}(p_2)} \begin{pmatrix} \mathcal{D}(p_1)K_{11}(p_2) & \mathcal{D}(p_2)K_{12}(p_1) \\ \mathcal{D}(p_1)K_{21}(p_2) & \mathcal{D}(p_2)K_{22}(p_1) \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Son inverse s'exprime comme

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} K_{22}(p_1)/\mathcal{D}(p_1) & -K_{12}(p_1)/\mathcal{D}(p_1) \\ -K_{21}(p_2)/\mathcal{D}(p_2) & K_{11}(p_2)/\mathcal{D}(p_2) \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

où $\mathcal{D}(p) = \det K(p)$. Si nous tenons compte maintenant du paramétrage unitaire des matrices $K(p_i)$ par les angles θ_1 et θ_2 , les relations réciproques entre les états propres de

saveur et de masse s'écrivent de manière simple sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \varphi_m^1 \\ \varphi_m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{1f} \\ \psi_{2f} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$\begin{pmatrix} \psi_{1f} \\ \psi_{2f} \end{pmatrix} = \frac{1}{c_1 c_2 + s_1 s_2} \begin{pmatrix} c_2 & s_1 \\ -s_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_m^1 \\ \varphi_m^2 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Les états propres de masse vérifient les relations

$$|\varphi_m^1| = 1 = |\varphi_m^2|, \quad \langle \varphi_m^1 | \varphi_m^2 \rangle = s_1 c_2 - c_1 s_2 \neq 0. \quad (2.17)$$

2.3 Conclusion

Nous avons montré qu'en Théorie Quantique des Champs la base des états propres de masse d'un système de fermions non-dégénérés n'est pas orthonormale. La cause première se trouve dans les corrections radiatives qui entraînent une dépendance des entités physiques comme le propagateur dans l'impulsion p , c'est à dire dans l'échelle d'énergie. La cause seconde est la non-dégénérescence, c'est à dire la présence d'une pluralité de pôles p_i pour le propagateur, correspondant aux masses physiques distinctes du système. Les états propres correspondants, qui sont les états physiques du système, sont de ce fait dispersés dans des bases orthonormales différentes, qui sont les bases des états propres du Lagrangien évalué à chacun des pôles, ce qui entraîne la disparition de l'orthonormalité de la base qu'ils constituent. L'unitarité de la théorie n'est pas mise en cause : pour un système décrit par un Lagrangien hermitien, la matrice reliant les états propres de saveur à ceux du Lagrangien formant une base orthonormale dépendant de p , est unitaire pour toute valeur donnée de p . Cependant, la non-dégénérescence entraîne, au sein de chacune des bases orthonormales apparaissant pour chaque p_i , l'existence d'états non physiques à côté du seul état physique de masse définie m_i . Quand à la matrice de mélange reliant la base des états propres de masse à celle des états propres de saveur, chacune de ses colonnes correspondant à une colonne de $K(p)$ évaluée à un p_i distinct (voir (2.13)), elle ne peut dès lors plus être unitaire.

La non-unitarité de la matrice de mélange est donc établie ici à partir d'arguments généraux de Théorie Quantique des Champs, et pour tous les types de fermions couplés non-dégénérés, à la différence d'autres approches (cf. en particulier [23, 24]) qui la considèrent de manière effective comme un phénomène induit à basse énergie par une nouvelle physique située "au-delà du Modèle Standard", dans le cadre de théories visant à rendre compte des masses des neutrinos (c'est le cas par exemple du mécanisme de *see-saw*).

Mentionnons enfin que la non-unitarité de la matrice de mélange reliant la base des états propres de saveur à celle des états propres de masse est également cohérente avec les travaux menés depuis plus de dix ans pour définir de manière rigoureuse la base de saveur en Théorie Quantique des Champs. Ceux-ci ont en effet montré (voir notamment [25, 26, 27]) qu'il était possible de construire à tout instant un espace de Fock des champs de saveur (c'est à dire les champs d'interaction) équivalent de manière non unitaire à l'espace de Fock des champs de masse définie. La légitimité de l'espace de saveur ainsi défini est néanmoins, à notre connaissance, une question encore débattue, la dépendance temporelle héritée par celui-ci de la transformation non unitaire permettant de le relier à l'espace de masse, ainsi que sa dépendance vis-à-vis de paramètres de masse arbitraires,

ayant suscité des critiques sur le bien-fondé et la pertinence physique d'une telle démarche [28, 18].

Chapitre 3

Angles de mélange des quarks et des leptons en Théorie Quantique des Champs

Ayant établi la non-unitarité de la matrice de mélange en Théorie Quantique des Champs, nous exposons dans ce chapitre la partie centrale de notre travail. Nous montrons, en considérant les cas successifs de deux et trois générations, que les angles de mélange des quarks comme des leptons réalisent une structure précise de violation de l'unitarité dans les courants neutres, correspondant à l'égalité de l'amplitude des violations de l'universalité et de l'absence des courants changeant la saveur au voisinage du cas unitaire exact. Nous obtenons ce faisant, à partir de la seule physique des courants neutres du Modèle Standard, la relation de complémentarité quarks-leptons reliant l'angle de Cabibbo des quarks au deuxième angle de mélange des neutrinos.

3.1 Deux générations

3.1.1 Courants neutres

Nous commençons par le cas simple de deux générations de fermions, qui peuvent être indifféremment des quarks ou des leptons. Afin de fixer les notations, nous travaillerons avec ces derniers. Nous pouvons écrire de manière synthétique les bases Ψ_f et Ψ_m des états propres de saveur et de masse en réunissant les doublets correspondants pour chacune des familles :

$$\Psi_f = \begin{pmatrix} \nu_{e,f} \\ \nu_{\mu,f} \\ e_f^- \\ \mu_f^- \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi_m = \begin{pmatrix} \nu_{e,m} \\ \nu_{\mu,m} \\ e_m^- \\ \mu_m^- \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

Les matrices de mélange K_ℓ et K_ν reliant l'une à l'autre sont définies par

$$\Psi_f = \left(\begin{array}{c|c} K_\nu & \\ \hline & K_\ell \end{array} \right) \Psi_m \quad (3.2)$$

Comme nous l'avons établi dans le chapitre précédent, ces matrices 2×2 ne sont pas unitaires en Théorie Quantique des Champs. Notre analyse du cas à deux particules a montré qu'il était possible de les paramétrer comme non-unitaires en faisant intervenir deux angles de mélange (voir les équations (2.15, 2.16)) au lieu d'un seul (comme cela est

fait dans le cas standard pour la matrice de Cabibbo). Nous choisissons dans la suite un paramétrage plus général prenant en compte la liberté d'une phase supplémentaire dans la définition de chacun des deux états propres de masse :

$$K_\nu^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} c_1 & -e^{i\alpha} s_1 \\ e^{i\beta} s_2 & e^{i\beta} c_2 \end{pmatrix}, \quad K_\ell^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\theta} c_3 & -e^{i\theta} s_3 \\ e^{i\omega} s_4 & e^{i\omega} c_4 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

c'est-à-dire

$$K_\nu = \frac{1}{e^{i(\alpha+\beta)}(c_1 c_2 + s_1 s_2)} \begin{pmatrix} e^{i\beta} c_2 & e^{i\alpha} s_1 \\ -e^{i\beta} s_2 & e^{i\alpha} c_1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$K_\ell = \frac{1}{e^{i(\theta+\omega)}(c_3 c_4 + s_3 s_4)} \begin{pmatrix} e^{i\omega} c_4 & e^{i\theta} s_3 \\ -e^{i\omega} s_4 & e^{i\theta} c_3 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Comme nous l'avons rappelé dans le premier chapitre, l'approche conventionnelle du modèle standard part du Lagrangien électrofaible écrit, par construction, dans la base des états propres de l'interaction de jauge à partir de la dérivée covariante (1.12) :

$$\mathcal{L}_{\text{faible}} = \bar{\Psi}_{fL} \gamma^\mu \left(\frac{g}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) + \frac{g}{\cos \theta_w} Z_\mu^0 (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) \right) \Psi_{fL}. \quad (3.6)$$

Les matrices

$$T^+ = \left(- \middle| \begin{array}{c} \mathbb{1} \end{array} \right), T^- = \left(\begin{array}{c} \mathbb{1} \end{array} \middle| - \right), T^3 = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \\ \hline & -\mathbb{1} \end{array} \right), \quad (3.7)$$

forment une représentation du groupe de jauge $SU(2)_L$ de l'interaction faible :

$$[T^+, T^3] = -T^+, \quad [T^-, T^3] = T^-, \quad [T^+, T^-] = 2T^3. \quad (3.8)$$

et l'opérateur de charge Q leptonique a la forme ¹

$$Q = \left(- \middle| \begin{array}{c} -\mathbb{1} \end{array} \right). \quad (3.9)$$

Les courants neutres dans la base des états propres de saveur sont donc contrôlés, dans chacun des sous-espaces 2×2 constitué des fermions de même charge électrique, par la matrice identité :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{c.n}} &= \frac{g}{\cos \theta_w} \bar{\Psi}_{fL} \gamma^\mu Z_\mu^0 (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) \Psi_{fL} \\ &= \frac{g}{2 \cos \theta_w} \bar{\Psi}_{fL} \gamma^\mu Z_\mu^0 \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \\ \hline & (-1 + 2 \sin^2 \theta_w) \mathbb{1} \end{array} \right) \Psi_{fL}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ils présentent de ce fait intrinsèquement, à l'ordre de l'arbre, deux caractéristiques fondamentales : l'universalité, c'est-à-dire l'invariance des courants neutres par échange des familles, et l'absence de courants neutres changeant la saveur. La première, qui correspond à l'identité des éléments diagonaux de la matrice $\mathbb{1}$, a sa raison profonde dans le fait que les couplages des fermions aux champs de jauge, réalisés à l'intérieur des dérivées

¹Dans le cas des quarks $Q = \left(-\frac{2}{3} \mathbb{1} \middle| \begin{array}{c} -\frac{1}{3} \mathbb{1} \end{array} \right)$

covariantes, dépendent uniquement de la représentation du groupe de jauge réalisée par le fermion considéré, laquelle ne varie pas lors d'un changement de famille. La seconde est exprimée par la nullité des éléments non-diagonaux de $\mathbb{1}$.

Dans cette approche standard, les matrices de mélange sont issues de la diagonalisation bi-unitaire de la matrice de masse et sont donc, à ce titre, unitaires. Par conséquent, les deux caractéristiques sus-mentionnées se transportent directement dans le Lagrangien écrit dans la base des états propres de masse :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{c.n.}} &= \frac{g}{\cos \theta_w} \bar{\Psi}_{fL} \gamma^\mu Z_\mu^0 (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) \Psi_{fL} \\
&= \frac{g}{2 \cos \theta_w} \bar{\Psi}_{mL} \gamma^\mu Z_\mu^0 \left(\frac{K_\nu^\dagger}{K_\ell^\dagger} \middle| \frac{\mathbb{1}}{(-1 + 2 \sin^2 \theta_w) \mathbb{1}} \right) \left(\frac{K_\nu}{K_\ell} \right) \Psi_{mL} \\
&= \frac{g}{2 \cos \theta_w} \bar{\Psi}_{mL} \gamma^\mu Z_\mu^0 \left(\frac{K_\nu^\dagger K_\nu}{(-1 + 2 \sin^2 \theta_w) K_\ell^\dagger K_\ell} \right) \Psi_{mL} \\
&= \frac{g}{2 \cos \theta_w} \bar{\Psi}_{mL} \gamma^\mu Z_\mu^0 \left(\frac{\mathbb{1}}{(-1 + 2 \sin^2 \theta_w) \mathbb{1}} \right) \Psi_{mL}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Notre démarche inverse la logique précédente, et prend pour point de départ le Lagrangien d'arrivée de l'approche standard, c'est à dire le Lagrangien (3.11) exprimé dans la base des états propres de masse. Nous supposons que les courants neutres sont déterminés dans cette base par la matrice identité, c'est à dire que l'universalité et l'absence de courants neutres changeant la saveur sont satisfaites à l'ordre de l'arbre dans la base des états propres de masse. Cette hypothèse est pleinement conforme à la réalité physique déterminée par les mesures expérimentales. Celles-ci en effet mesurent les particules physiques, qui se propagent, c'est à dire des états propres de masse, et montrent que les deux propriétés précédentes sont vérifiées avec une grande précision.

En résumé, nous postulons, sur la base des observations expérimentales, le Lagrangien des courants neutres contrôlé dans la base des états propres de masse par la matrice identité :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{c.n.}} &= \frac{g}{\cos \theta_w} \bar{\Psi}_{mL} \gamma^\mu Z_\mu^0 (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) \Psi_{mL} \\
&= \frac{g}{2 \cos \theta_w} \bar{\Psi}_{mL} \gamma^\mu Z_\mu^0 \left(\frac{\mathbb{1}}{(-1 + 2 \sin^2 \theta_w) \mathbb{1}} \right) \Psi_{mL}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Cependant, à la différence de l'approche standard, cette propriété ne se transporte pas directement de la base des états propres de masse vers celle des états propres de saveur, car nos matrices de mélange K_ℓ et K_ν ne sont pas unitaires. En passant dans la base de saveur, le Lagrangien prend de ce fait la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{c.n.}} &= \frac{g}{\cos \theta_w} \bar{\Psi}_{mL} \gamma^\mu Z_\mu^0 (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) \Psi_{mL} \\
&= \frac{g}{2 \cos \theta_w} \bar{\Psi}_{fL} \gamma^\mu Z_\mu^0 \left(\frac{(K_\nu^{-1})^\dagger}{(K_\ell^{-1})^\dagger} \middle| \frac{\mathbb{1}}{(-1 + 2 \sin^2 \theta_w) \mathbb{1}} \right) \left(\frac{K_\nu^{-1}}{K_\ell^{-1}} \right) \Psi_{fL} \\
&= \frac{g}{2 \cos \theta_w} \bar{\Psi}_{fL} \gamma^\mu Z_\mu^0 \left(\frac{(K_\nu^{-1})^\dagger K_\nu^{-1}}{(-1 + 2 \sin^2 \theta_w) (K_\ell^{-1})^\dagger K_\ell^{-1}} \right) \Psi_{fL}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

3.1.2 Cas standard et matrice unitaire

Les courants neutres apparaissent donc déterminés par les produits $(K_\nu^{-1})^\dagger K_\nu^{-1}$ et $(K_\ell^{-1})^\dagger K_\ell^{-1}$ dans la base des états propres de saveur. Les deux propriétés physiques d'uni-

versalité et d'absence des courants neutres changeant la saveur à l'ordre de l'arbre, qui se traduisent respectivement par les conditions d'identité des éléments diagonaux et de nullité des éléments non-diagonaux, sont réalisées lorsque les matrices de mélange satisfont la condition :

$$(K_{\nu,\ell}^{-1})^\dagger K_{\nu,\ell}^{-1} = \mathbb{1}. \quad (3.14)$$

qui exprime précisément l'unitarité de la matrice de mélange K .

Avec le paramétrage (3.3) adopté, les produits apparaissant dans le membre de gauche de l'équation (3.14) ont la forme suivante :

$$\begin{aligned} (K_\nu^{-1})^\dagger K_\nu^{-1} &= \begin{pmatrix} c_1^2 + s_2^2 & c_1 s_1 - c_2 s_2 \\ c_1 s_1 - c_2 s_2 & s_1^2 + c_2^2 \end{pmatrix}, \\ (K_\ell^{-1})^\dagger K_\ell^{-1} &= \begin{pmatrix} c_3^2 + s_4^2 & c_3 s_3 - c_4 s_4 \\ c_3 s_3 - c_4 s_4 & s_3^2 + c_4^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le traitement des leptons chargés étant strictement parallèle à celui des neutrinos, nous travaillerons avec ces derniers pour fixer les idées. La condition d'unitarité (3.14) équivaut

à

$$c_1^2 + s_2^2 = c_2^2 + s_1^2 \quad \text{Universalité dans les courants neutres}$$

$$c_1 s_1 = c_2 s_2 \quad \text{ou} \quad c_1 s_1 = -c_2 s_2 \quad \text{Absence de courants neutres changeant la saveur}$$

- La première équation, équivalant à $\cos(2\theta_1) = \cos(2\theta_2)$, implique $\theta_2 = \pm\theta_1[\pi]$.
- La seconde condition, équivalant à $\sin(2\theta_1) = \pm\sin(2\theta_2)$, implique $\theta_2 = \pm\theta_1[\pi]$ ou $\theta_2 = \mp\theta_1 + \pi/2[\pi]$.

Nous obtenons donc un unique ensemble de solutions :

$$\theta_2 = \pm\theta_1[\pi], \quad (3.15)$$

à l'intérieur duquel il est possible, en résolvant séparément les deux conditions, de distinguer deux sous-ensembles de solutions correspondant à des valeurs particulières des angles de mélange :

$$\{\theta_1 = 0 \left[\frac{\pi}{2} \right], \theta_2 = \pm\theta_1[\pi]\}, \quad \{\theta_1 = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right], \theta_2 = \pm\theta_1[\pi]\}. \quad (3.16)$$

Le second de ces sous-ensembles regroupe notamment les angles de mélange maximaux. Il est intéressant de noter la sensibilité de ces divers types de solutions par rapport à de petites variations dans le plan (θ_1, θ_2) . Considérons par exemple l'effet d'un déplacement infinitésimal $\theta_2 \rightarrow \theta_2 + \epsilon$ de l'angle θ_2 autour d'un point donné. Les conditions d'universalité $\cos(2\theta_2) - \cos(2\theta_1)$ et d'absence de courants neutres changeant la saveur $c_2 s_2 \pm c_1 s_1 = 0$ varient respectivement de $-4\epsilon c_2 s_2$ et $\epsilon(c_2^2 - s_2^2)$. Il s'ensuit que :

- pour les solutions discrètes du type $0 \left[\frac{\pi}{2} \right]$, la première variation s'annule, mais non la seconde. la condition d'universalité est satisfaite à l'ordre ϵ^2 , tandis que celle d'absence des courants neutres changeant la saveur l'est seulement à l'ordre ϵ .

- pour les solutions discrètes du type $\frac{\pi}{4} \left[\frac{\pi}{2} \right]$ correspondant au mélange maximal, l'inverse se produit : l'absence de courants neutres changeant la saveur est satisfaite à l'ordre ϵ^2 , l'universalité à l'ordre ϵ .

- pour les solutions générales $\theta_2 = \pm\theta_1[\pi]$, les deux conditions sont satisfaites à l'ordre ϵ seulement.

L'absence de courants neutres changeant la saveur est donc spécialement assurée par le mélange maximal, tandis que l'universalité l'est pour les angles proportionnels à $\pi/2$.

Nous voyons donc que les deux propriétés d'universalité dans les courants neutres et d'absence de tels courants changeant la saveur à l'ordre de l'arbre, se traduisant par la condition $(K_\nu^{-1})^\dagger K_\nu^{-1} = \mathbb{1}$, réduisent la dépendance de la matrice de mélange à un angle unique en liant les deux angles par la relation $\theta_2 = \pm\theta_1[\pi]$. Cette contrainte très générale, provenant de la résolution rigoureuse du système trigonométrique équivalent à (3.14), peut être simplifiée en tenant compte du fait qu'il est toujours possible de se ramener, par un choix convenable de signes pour les champs fermioniques, à des angles de mélange situés dans l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$. On peut donc ne considérer que la solution unique du système précédent dans cet intervalle, qui est $\theta_2 = \theta_1$.

Ainsi, en requérant l'universalité dans les courants neutres et l'absence de tels courants changeant la saveur, nous avons imposé *a posteriori* l'unitarité à notre matrice de mélange paramétrée *a priori* comme non-unitaire. Ce premier résultat confirme la cohérence de notre approche, et même s'il n'apporte rien de nouveau en ce qu'il nous fait retrouver la matrice de mélange unitaire présente dans l'approche standard, du moins apparaît-il fondé sur des bases physiques plus rigoureuses que cette dernière, dans laquelle l'unitarité de la matrice de mélange est considérée comme donnée *a priori*. De plus, notre démarche nous permet de distinguer, parmi l'ensemble continu des solutions (3.15), des sous-ensembles de solutions discrètes à angle fixé, parmi lesquels celui correspondant au mélange maximal, qui semble jouer un rôle important dans la matrice de mélange des neutrinos.

3.1.3 Développement au voisinage de l'unitarité et angle de Cabibbo

Nonobstant le retour au cas unitaire dont nous avons vérifié qu'il pouvait s'effectuer naturellement à partir de notre approche, nous avons montré au chapitre précédent que la matrice de mélange d'un système de fermions couplés non dégénérés ne pouvait pas prétendre à l'unitarité en Théorie Quantique des Champs. Nous nous attendons certes à ce que la déviation par rapport à l'unitarité soit très faible : l'accord non démenti à ce jour, et avec une précision spectaculaire, du Modèle Standard avec les données expérimentales, nous donne à penser que les manifestations observables auxquelles serait susceptible de donner lieu la non-unitarité de la matrice de mélange sont suffisamment faibles pour se situer en-deçà de la précision des mesures actuelles. Ce présupposé est confirmé par les résultats d'un travail similaire mené sur les kaons neutres [4]. Bien que l'écart des masses des fermions du Modèle Standard, auquel est proportionnel la déviation de l'unitarité de leur matrice de mélange, soit supérieur à celui des kaons neutres, nous sommes néanmoins conduits à penser que la réalité physique se situe dans un petit voisinage des solutions standard mises en évidence ci-dessus, correspondant à une matrice de mélange unitaire.

Nous décrivons à deux dimensions ce voisinage à l'aide d'un paramètre infinitésimal ϵ :

$$\theta_2 = \theta_1 + \epsilon, \quad (3.17)$$

La matrice de mélange K , paramétrée comme précédemment par

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} c_1 & -e^{i\alpha} s_1 \\ e^{i\beta} s_2 & e^{i\beta} c_2 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

dévie de l'unitarité de la manière suivante :

$$(K^{-1})^\dagger K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \sin(2\theta_1) & \cos(2\theta_1) \\ \cos(2\theta_1) & -\sin(2\theta_1) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.19)$$

Le membre de droite de (3.19) fait clairement apparaître que les deux propriétés physiques d'universalité dans les courants neutres et d'absence de tels courants changeant la saveur, correspondant respectivement à l'identité des éléments diagonaux et la nullité des éléments non-diagonaux, ne peuvent plus être satisfaites simultanément à l'ordre ϵ comme elles le sont à l'ordre 0 dans le cas unitaire ($\theta_2 = \theta_1$).

Néanmoins, il est possible de conserver une propriété plus faible, à savoir que la déviation par rapport à l'unitarité soit telle que les deux propriétés physiques sus-mentionnées soient violées avec la même amplitude. Cette nouvelle condition se traduit par l'égalité $2|\sin(2\theta_1)| = |\cos(2\theta_1)|$, c'est à dire

$$\tan(2\theta_1) = \pm \frac{1}{2}. \quad (3.20)$$

Cette équation admet pour solutions deux valeurs opposées de l'angle θ_1 correspondant à $\cos \theta_1 = 0.9732$ et $\sin \theta_1 = \pm 0.2298$. Or ces valeurs sont remarquablement proches des intervalles expérimentaux obtenus pour les éléments $|V_{ud}| = |c_{12}c_{13}|$ ($|c_{12}| \in [0.9735, 0.9740]$) et $|V_{us}| = |s_{12}c_{13}|$ ($|s_{12}| \in [0.2236, 0.2278]$) de la matrice CKM , dont la mesure permet la détermination de l'angle θ_{12} pour les quarks, encore appelé angle de Cabibbo² [29]. En d'autres termes, la valeur physique de l'angle de Cabibbo observée dans la nature se trouve être celle qui assure l'égalité de l'amplitude des violations des deux propriétés physiques d'universalité des courants neutres et d'absence des courants neutres changeant la saveur causées par la non-unitarité de la matrice de mélange.

Le changement de variable $x = \tan(\pi/4 - \theta_1) \Leftrightarrow \tan \theta_1 = \frac{1-x}{1+x}$ dans l'équation (3.20) fait apparaître de manière remarquable la célèbre équation

$$\frac{1}{x} - x = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \pm x - 1 = 0 \quad (3.21)$$

dont l'une des quatre solutions $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ n'est autre que le nombre d'or [30]

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (3.22)$$

Nous pouvons donc exprimer les solutions de (3.20) en fonction de φ :

$$\tan \theta = \pm \frac{\varphi - 1}{\varphi + 1}, \quad \pm \frac{\varphi + 1}{\varphi - 1}. \quad (3.23)$$

²Moyennant l'excellente approximation $\theta_{13} = 0$, c'est à dire $c_{13} = 1$.

En particulier, les deux premières correspondent à la tangente de l'angle de Cabibbo.

L'équation (3.21) est invariante sous les transformations $x \rightarrow 1/x$ et $x \rightarrow -x$ (ainsi que leur combinaison $x \rightarrow -1/x$). Les symétries correspondantes de (3.20) sont respectivement $\theta_1 \rightarrow -\theta_1$, $\theta_1 \rightarrow \pm\pi/2 - \theta_1$, ainsi que $\theta_1 \rightarrow \theta_1 \pm \pi/2$.

Pour comprendre la signification physique de ces symétries il nous faut revenir à l'expression du courant neutre, qui s'écrit dans le voisinage du cas Cabibbo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{c.neutres}} &= \frac{g}{2\cos\theta_w} \gamma^\mu Z_\mu^0 \bar{\Psi}_{fL} (K^{-1})^\dagger K^{-1} \Psi_{fL} \\ &= \frac{g}{2\cos\theta_w} \gamma^\mu Z_\mu^0 \left(\bar{\Psi}_{fL} \Psi_{fL} + \epsilon \bar{\Psi}_{fL} \begin{pmatrix} \sin(2\theta_1) & -e^{-i\xi} \cos(2\theta_1) \\ -e^{i\xi} \cos(2\theta_1) & -\sin(2\theta_1) \end{pmatrix} \Psi_{fL} \right)\end{aligned}\quad (3.24)$$

On montre facilement que :

- (3.25) est invariant sous la transformation $\theta_1 \rightarrow -\theta_1$ si les champs se transforment simultanément comme :

$$u_f \rightarrow e^{i\zeta} c_f \quad \text{et} \quad c_f \rightarrow e^{i\zeta} c_f \quad (3.26)$$

- (3.25) est invariant sous la transformation $\theta_1 \rightarrow \pm\pi/2 - \theta_1$ si les champs se transforment simultanément comme :

$$u_f \rightarrow e^{i\zeta} u_f \quad \text{et} \quad c_f \rightarrow e^{i(\zeta-\pi)} c_f, \quad (3.27)$$

où ζ est un angle quelconque.

Ainsi, la symétrie $x \rightarrow 1/x$ reflète l'invariance du courant neutre sous l'échange des familles $u_f \leftrightarrow c_f$, $d_f \leftrightarrow s_f$, c'est à dire la condition d'universalité, tandis que la symétrie $x \rightarrow -x$ correspond à un simple changement de phase dans les champs.

3.2 Trois générations

Nous nous proposons maintenant d'étendre l'approche précédente au cas le plus général de trois générations de fermions, recouvrant l'ensemble des particules connues à ce jour. Ceci nous amènera à montrer que les configurations d'angles de mélange des trois générations de quarks et de leptons mesurées expérimentalement sont compatibles avec la même structure particulière de déviation de l'unitarité de la matrice de mélange dans les courants neutres, qui s'est révélée satisfaite dans le cas de deux familles par l'angle de Cabibbo des quarks.

Définissons pour commencer notre matrice de mélange à trois générations. Nous nous inspirons pour ce faire du procédé utilisé dans l'approche standard pour la matrice de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa :

$$K^{-1} = K_{23}^{-1} \times K_{13}^{-1} \times K_{12}^{-1} \quad (3.28)$$

à la différence près que les K_{ij}^{-1} sont maintenant des matrices non unitaires construites à partir de matrices 2×2 paramétrées chacune par deux angles de mélange $(\theta_{ij}, \tilde{\theta}_{ij})$ à la manière du chapitre précédent. En notant $\tilde{c}_{ij} = \cos(\tilde{\theta}_{ij})$ et $\tilde{s}_{ij} = \sin(\tilde{\theta}_{ij})$, nous obtenons

une matrice paramétrée par six angles de mélange, au lieu de 3 dans le cas unitaire standard :

$$\begin{aligned}
 K^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -\tilde{s}_{23} & \tilde{c}_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tilde{s}_{13} & 0 & \tilde{c}_{13} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -\tilde{s}_{12} & \tilde{c}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c_{13}c_{12} & c_{13}s_{12} & s_{13} \\ -c_{23}\tilde{s}_{12} - c_{12}s_{23}\tilde{s}_{13} & c_{23}\tilde{c}_{12} - s_{12}s_{23}\tilde{s}_{13} & s_{23}\tilde{c}_{13} \\ \tilde{s}_{12}\tilde{s}_{23} - c_{12}\tilde{c}_{23}\tilde{s}_{13} & -\tilde{c}_{12}\tilde{s}_{23} - s_{12}\tilde{c}_{23}\tilde{s}_{13} & \tilde{c}_{23}\tilde{c}_{13} \end{pmatrix}. \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Ce faisant, nous adoptons un paramétrage simplifié par rapport à celui le plus général pour une matrice 3×3 non unitaire, en omettant volontairement les phases supplémentaires présentes à deux dimensions (cf. (3.3)). En particulier, nous n'incluons pas les phases paramétrant la violation de CP , supposant de ce fait implicitement que les effets de cette dernière, présente dans le secteur des quarks, ne modifient pas de manière significative les résultats obtenus, ni n'infirment la pertinence physique de la démarche qui les sous-tend.

Dans la suite, pour alléger le texte, les éléments du produit $(K^{-1})^\dagger K^{-1}$ seront abrégés en $[i, j]$, et les courants neutres correspondants seront notés $\{ij\}$. Ainsi, pour les quarks, $\{12\}$ représente, selon le secteur considéré, $\bar{u}_{fL}\gamma^\mu c_{fL}$ ou $\bar{d}_{fL}\gamma^\mu s_{fL}$, et dans le cas des neutrinos, $\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu \nu_{\mu fL}$ ou $\bar{e}_{fL}\gamma^\mu \mu_{fL}$.

En suivant la même démarche que celle adoptée pour deux générations, nous supposons dans un premier temps que la matrice de mélange (3.29) est unitaire, de telle sorte que les courants neutres sont déterminés, dans la base des états propres de saveur comme dans celle des états propres de masse, par la matrice identité. Les équations exprimant les conditions d'unitarité nous permettront de déterminer les solutions "standard", à partir desquelles nous pourrions considérer de petites déviations par rapport à l'unitarité de la matrice de mélange dues aux différences de masse des différentes particules, engendrant une petite déviation par rapport à l'identité pour la matrice contrôlant les courants neutres dans la base de saveur.

La condition d'unitarité de la matrice de mélange

$$(K^{-1})^\dagger K^{-1} = \mathbb{1}. \quad (3.30)$$

exprime l'universalité et l'absence de courants changeant la saveur à l'ordre de l'arbre pour les courants neutres dans la base de saveur, en supposant que ces deux propriétés sont vérifiées dans la base des états propres de masse.

Les trois conditions provenant de l'absence de courants neutres non diagonaux sont :

- absence des courants $\{13\}$ et $\{31\}$:

$$[13] = 0 = [31] \Leftrightarrow c_{12} [c_{13}s_{13} - \tilde{c}_{13}\tilde{s}_{13}(\tilde{c}_{23}^2 + s_{23}^2)] - \tilde{c}_{13}\tilde{s}_{12}(c_{23}s_{23} - \tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23}) = 0; \quad (3.31)$$

- absence des courants $\{23\}$ et $\{32\}$:

$$[23] = 0 = [32] \Leftrightarrow s_{12} [c_{13}s_{13} - \tilde{c}_{13}\tilde{s}_{13}(\tilde{c}_{23}^2 + s_{23}^2)] + \tilde{c}_{13}\tilde{c}_{12}(c_{23}s_{23} - \tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23}) = 0; \quad (3.32)$$

- absence des courants $\{12\}$ et $\{21\}$:

$$\begin{aligned}
 [12] = 0 = [21] \Leftrightarrow s_{12}c_{12}c_{13}^2 - \tilde{s}_{12}\tilde{c}_{12}(c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) + s_{12}c_{12}\tilde{s}_{13}^2(s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2) \\
 + \tilde{s}_{13}(s_{12}\tilde{s}_{12} - c_{12}\tilde{c}_{12})(c_{23}s_{23} - \tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23}) = 0. \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Les deux conditions indépendantes issues de l'universalité s'écrivent :

- égalité des courants $\{11\}$ et $\{22\}$:

$$[11] - [22] = 0 \Leftrightarrow (c_{12}^2 - s_{12}^2) [c_{13}^2 + \tilde{s}_{13}^2(s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2)] - (\tilde{c}_{12}^2 - \tilde{s}_{12}^2)(c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) + 2\tilde{s}_{13}(c_{23}s_{23} - \tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23})(c_{12}\tilde{s}_{12} + s_{12}\tilde{c}_{12}) = 0; \quad (3.34)$$

- égalité des courants $\{22\}$ et $\{33\}$:

$$[22] - [33] = 0 \Leftrightarrow s_{12}^2 + \tilde{c}_{12}^2(c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) - (s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2) + (1 + s_{12}^2) [\tilde{s}_{13}^2(s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2) - s_{13}^2] + 2s_{12}\tilde{s}_{13}\tilde{c}_{12}(\tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23} - c_{23}s_{23}) = 0. \quad (3.35)$$

L'égalité des courants $\{11\}$ et $\{33\}$ n'est pas une condition indépendante, mais s'exprime comme la somme des deux équations précédentes.

Nous sommes donc en présence d'un système complexe de cinq équations trigonométriques dont la résolution immédiate n'est pas évidente. Pour en simplifier l'approche, commençons par annuler l'un des deux angles correspondant au mélange entre les générations 1 et 3. Cette approximation est pleinement légitimée par les observations expérimentales aussi bien dans le secteur des quarks que dans celui des neutrinos, qui montrent tous les deux un mélange très faible entre les générations 1 et 3. On peut montrer (cf. appendice A) que si l'on annule l'un des angles relatifs à ce mélange, l'autre s'annule alors simultanément. Nous posons donc en première approximation

$$\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}. \quad (3.36)$$

Dans cette limite, les équations (3.31), (3.32), (3.33), (3.34) et (3.35), deviennent

$$\tilde{s}_{12}(c_{23}s_{23} - \tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23}) = 0 \quad (3.37a)$$

$$\tilde{c}_{12}(c_{23}s_{23} - \tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23}) = 0 \quad (3.37b)$$

$$s_{12}c_{12} - \tilde{s}_{12}\tilde{c}_{12}(c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) = 0 \quad (3.37c)$$

$$(c_{12}^2 - s_{12}^2) - (\tilde{c}_{12}^2 - \tilde{s}_{12}^2)(c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) = 0 \quad (3.37d)$$

$$s_{12}^2 + \tilde{c}_{12}^2(c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) - (s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2) = 0. \quad (3.37e)$$

Le système se simplifie considérablement, et on montre aisément (cf. appendice B) qu'il admet deux solutions :

- θ_{12} et θ_{23} standards :

$$\tilde{\theta}_{12} = \theta_{12}, \quad \tilde{\theta}_{23} = \theta_{23}. \quad (3.38)$$

- θ_{12} standard et les deux angles θ_{23} et $\tilde{\theta}_{23}$ maximaux :

$$\tilde{\theta}_{12} = \theta_{12}, \quad \tilde{\theta}_{23} = \frac{\pi}{4} = \theta_{23}. \quad (3.39)$$

En effet, bien que la solution (3.39) corresponde à un sous-cas de (3.38), elle apparaît néanmoins de manière indépendante lors de la résolution du système.

En nous inspirant du travail réalisé dans le cas de deux générations, nous nous proposons maintenant d'étudier, au voisinage de chacune de ces deux solutions exactes correspondant à l'approximation d'une matrice de mélange unitaire, une structure particulière des courants neutres donnée par l'ansatz suivant :

$$(K^{-1})^\dagger K^{-1} - \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \alpha & \pm(\alpha - \beta) & \pm(\alpha - \gamma) \\ \pm(\alpha - \beta) & \beta & \pm(\beta - \gamma) \\ \pm(\alpha - \gamma) & \pm(\beta - \gamma) & \gamma \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

Cette structure n'est autre que la généralisation pour trois générations de celle mise en évidence par l'angle de Cabibbo dans le cas de deux familles : elle revient à considérer, pour chacun des trois couples de fermions possibles dans un secteur d'isospin donné, que la violation de l'universalité dans les courants neutres est égale à celle de l'absence de tels courants changeant la saveur. En étant appliquées à la forme générale (3.29) de la matrice de mélange, de telles conditions donnent lieu à un système d'équations dont les solutions correspondent avec une très bonne approximation aux configurations d'angles de mélange déterminées expérimentalement pour les quarks comme pour les neutrinos.

3.2.1 Le secteur des quarks

Nous paramétrons le voisinage de la première de solution (3.38) de la manière suivante (cf. (3.17)) :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{12} &= \theta_{12} + \epsilon, \\ \tilde{\theta}_{23} &= \theta_{23} + \eta. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Le cas simplifié $\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$

Nous nous plaçons à nouveau, pour commencer, dans l'approximation consistant à annuler les deux angles de mélange reliant les générations 1 et 3. Dans le voisinage caractérisé par (3.41), les conditions équivalant à l'unitarité de la matrice de mélange ne sont plus satisfaites exactement, ce qui correspond à une déviation de la valeur zéro, au premier ordre dans les paramètres ϵ et η , des membres de gauche des équations du système (3.37), :

$$\eta s_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2), \quad (3.42a)$$

$$\eta c_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2), \quad (3.42b)$$

$$\epsilon(c_{12}^2 - s_{12}^2) + 2\eta c_{12}s_{12}c_{23}s_{23}, \quad (3.42c)$$

$$4\epsilon c_{12}s_{12} - 2\eta(c_{12}^2 - s_{12}^2)c_{23}s_{23}, \quad (3.42d)$$

$$-2\epsilon c_{12}s_{12} + 2\eta(1 + c_{12}^2)c_{23}s_{23}. \quad (3.42e)$$

Nous imposons maintenant la même condition que pour deux générations, à savoir que la propriété d'absence des courants $\{12\}$, $\{21\}$ (équation (3.42c)) est violée avec la même amplitude que l'universalité pour les courants $\{11\}$ et $\{22\}$ (équation (3.42d)) :

$$|2\eta s_{12}c_{12}s_{23}c_{23} + \epsilon(c_{12}^2 - s_{12}^2)| = |-2\eta s_{23}c_{23}(c_{12}^2 - s_{12}^2) + 4\epsilon s_{12}c_{12}|. \quad (3.43)$$

Nous choisissons le signe "+" pour les deux membres de cette équation, de telle manière que l'on retrouve, lorsque $\theta_{23} = 0$, c'est à dire en revenant au cas de deux générations,

l'équation satisfaite par l'angle de Cabibbo avec un signe "+" également : $\tan \theta_{12} = +1/2$. Nous imposons la même condition dans la voie (2, 3), d'où à partir de (3.42b) et (3.42e) :

$$|\eta c_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2)| = |2\eta s_{23}c_{23}(1 + c_{12}^2) - 2\epsilon s_{12}c_{12}|. \quad (3.44)$$

Nous pouvons alors extraire de (3.43) le rapport η/ϵ , afin de l'introduire dans (3.44), ce qui nous permet d'obtenir finalement l'expression de l'angle θ_{23} en fonction de θ_{12} :

$$\tan(2\theta_{23}) = \frac{c_{12}}{1 + c_{12}^2 - 2s_{12}c_{12} \frac{(s_{12}c_{12} + c_{12}^2 - s_{12}^2)}{4s_{12}c_{12} - (c_{12}^2 - s_{12}^2)}} \quad (3.45)$$

La représentation graphique de $\theta_{23} = f(\theta_{12})$ est donnée figure 3 ci-dessous, avec les intervalles expérimentaux pour θ_{23} (droites horizontales) et θ_{12} (droites verticales). Etudions sa compatibilité avec les valeurs expérimentales des angles de mélange des quarks.

L'angle θ_{23} est obtenu expérimentalement à partir de la mesure de $V_{cb} \equiv s_{23}c_{13}$ dans le paramétrage "standard" de la matrice CKM (d'où l'on déduit directement $\sin(\theta_{23})$ en prenant avec une très bonne approximation $c_{13} = 1$). Les mesures les plus récentes, extraites des désintégrations semi-leptoniques des mésons B en c , donnent $|V_{cb}| = (41.7 \pm 0.7) \times 10^{-3}$ (déterminations inclusives) et $|V_{cb}| = (41.6 \pm 0.6) \times 10^{-3}$ (déterminations exclusives) [29]. L'intervalle correspondant pour θ_{23} est donc $[0.041, 0.0422 - 0.0424]$.

L'angle θ_{12} peut quant à lui être déterminé à partir de la mesure de $V_{ud} = c_{12}c_{13}$ ou bien de $V_{us} = s_{12}c_{13}$. La première, effectuée dans les désintégrations nucléaires beta $0^+ \rightarrow 0^+$, donne $|V_{ud}| = 0.97377 \pm 0.00027$ [29], d'où l'intervalle $[0.2285, 0.2307]$ (droites pourpres) pour θ_{12} . La seconde, extraite des désintégrations semileptoniques des kaons, conduit à $|V_{us}| = 0.2257 \pm 0.0021$ [29], d'où l'intervalle $[0.2255, 0.2298]$ (droites noires) pour θ_{12} .

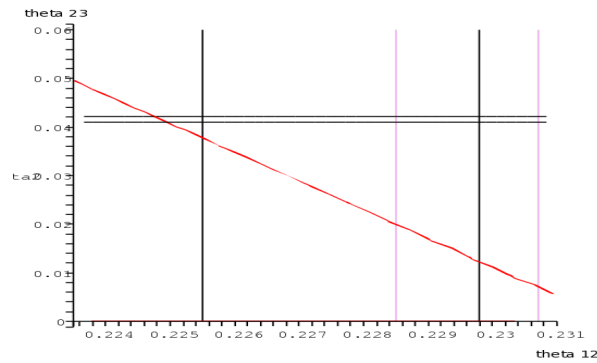


Fig. 3 : θ_{23} en fonction de θ_{12} (quarks) ; le cas simplifié $\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$

La valeur de θ_{23} mesurée expérimentalement correspond, par notre relation (3.45), à $\theta_{12} \approx 0.221$, c'est à dire $\cos(\theta_{12}) \approx 0.9757$. Cette valeur de θ_{12} se situe à 7.5×10^{-3} de la borne inférieure de l'intervalle expérimental issu de la mesure de V_{ud} , et à 4.5×10^{-3} de la borne inférieure de l'intervalle correspondant à V_{us} .

Nous voyons donc que dans l'approximation $\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$, les valeurs expérimentales des angles de mélange des quarks sont proches des solutions aux contraintes exprimées par le système (3.42).

Le cas général

Nous considérons à présent de la manière la plus générale le voisinage de la configuration exacte dans laquelle les trois angles de mélange des quarks sont de type standard $\tilde{\theta}_{ij} = \theta_{ij}[\pi]$:

$$\tilde{\theta}_{12} = \theta_{12} + \epsilon, \quad (3.46)$$

$$\tilde{\theta}_{23} = \theta_{23} + \eta, \quad (3.47)$$

$$\tilde{\theta}_{13} = \theta_{13} + \rho. \quad (3.48)$$

La violation des propriétés d'universalité et d'absence des courants neutres changeant la saveur se traduit par la déviation des membres de gauche de équations (3.31) à (3.35) de la valeur zéro :

$$\eta c_{13} [s_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + 2s_{13}c_{12}c_{23}s_{23}] - \rho c_{12}(c_{13}^2 - s_{13}^2) = 0 \quad (3.49a)$$

$$\eta c_{13} [-c_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + 2s_{13}s_{12}c_{23}s_{23}] - \rho s_{12}(c_{13}^2 - s_{13}^2) = 0 \quad (3.49b)$$

$$- \epsilon(c_{12}^2 - s_{12}^2) + \eta [s_{13}(c_{23}^2 - s_{23}^2)(c_{12}^2 - s_{12}^2) - 2c_{23}s_{23}c_{12}s_{12}(1 + s_{13}^2)] + 2\rho c_{13}s_{13}c_{12}s_{12} = 0 \quad (3.49c)$$

$$4\epsilon c_{12}s_{12} + \eta [-4s_{13}s_{12}c_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) - 2c_{23}s_{23}(c_{12}^2 - s_{12}^2)(1 + s_{13}^2)] + 2\rho c_{13}s_{13}(c_{12}^2 - s_{12}^2) = 0 \quad (3.49d)$$

$$- 2\epsilon s_{12}c_{12} + \eta [2s_{13}c_{12}s_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + 2c_{23}s_{23}((c_{12}^2 - s_{12}^2) + c_{13}^2(1 + s_{12}^2))] + 2\rho c_{13}s_{13}(1 + s_{12}^2) = 0 \quad (3.49e)$$

$$2\epsilon s_{12}c_{12} + \eta [-2s_{13}c_{12}s_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + 2c_{23}s_{23}(c_{13}^2(1 + c_{12}^2) - (c_{12}^2 - s_{12}^2))] + 2\rho c_{13}s_{13}(1 + c_{12}^2) = 0 \quad (3.49f)$$

Nous avons rajouté l'équation non indépendante (3.49f), dont nous aurons également besoin pour la résolution, et qui exprime la violation de l'universalité pour les courants diagonaux {11} et {33}. Elle s'écrit comme la somme de (3.49d) et (3.49e).

Le principe de notre calcul est le même que précédemment : nous imposons successivement dans chaque canal (1, 2), (2, 3) et (1, 3), que l'absence des courants neutres non-diagonaux soit violée avec la même amplitude que l'universalité de la paire de courants neutres diagonaux correspondants. Nous obtenons ainsi trois équations qui nous permettent d'éliminer les trois paramètres ϵ , η et ρ de déviation par rapport au cas unitaire exact.

• La condition que l'absence du courant non-diagonal {12} soit violée avec la même force que l'universalité dans les courants {11} et {22}, exprimée par (3.49c) = -(3.49d)³, permet d'exprimer ρ en fonction de ϵ et η :

$$\rho = -\epsilon \frac{4c_{12}s_{12} - (c_{12}^2 - s_{12}^2)}{2c_{13}s_{13}(c_{12}s_{12} + c_{12}^2 - s_{12}^2)} + \eta \left(\frac{c_{23}s_{23}}{c_{13}s_{13}}(1 + s_{13}^2) + \frac{s_{13}(c_{23}^2 - s_{23}^2)(4c_{12}s_{12} - (c_{12}^2 - s_{12}^2))}{2c_{13}s_{13}(c_{12}s_{12} + c_{12}^2 - s_{12}^2)} \right) \quad (3.50)$$

³Le signe "-" permet de retrouver la relation $\tan(2\theta_{12}) = 1/2$ dans le cas d'un retour à deux générations, c'est-à-dire lorsque $\theta_{23} = \theta_{13} = 0 = \eta = \rho$.

- Nous insérons alors cette expression dans la relation $(3.49b) = -(3.49e)$ ⁴ exprimant la même condition dans le canal $(2, 3)$, ce qui nous permet d'éliminer ρ pour obtenir le rapport ϵ/η :

$$\frac{\epsilon}{\eta} = s_{13}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + \frac{-c_{12}c_{13}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + 2c_{23}s_{23}(3 + c_{13}s_{13}s_{12}) - s_{12}(c_{13}^2 - s_{13}^2)(1 + s_{13}^2)\frac{c_{23}s_{23}}{c_{13}s_{13}}}{2c_{12}s_{12} - s_{12}(c_{13}^2 - s_{13}^2)\frac{4c_{12}s_{12} - (c_{12}^2 - s_{12}^2)}{2c_{13}s_{13}(c_{12}s_{12} + c_{12}^2 - s_{12}^2)} + (1 + s_{12}^2)\frac{4c_{12}s_{12} - (c_{12}^2 - s_{12}^2)}{c_{12}s_{12} + c_{12}^2 - s_{12}^2}} \quad (3.51)$$

- Finalement, en introduisant cette dernière équation dans la relation $|(3.49a)| = -|(3.49f)|$ exprimant la même condition dans le canal $(1, 3)$, l'on parvient à une relation sous forme de fonction implicite $F(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}) = 0$, indépendante de ϵ , η et ρ , reliant les trois angles de mélange θ_{12} , θ_{23} et θ_{13} .

De même que précédemment, nous pouvons représenter graphiquement θ_{23} comme une fonction de θ_{12} en vertu de la fonction F , pour des valeurs de θ_{13} fixées. L'intervalle expérimental pour l'angle θ_{13} des quarks est donné par la détermination de $|V_{ub}| \equiv |\sin(\theta_{13})| = (4.31 \pm 0.30) \times 10^{-3}$ [29]. Dans la représentation suivante nous avons choisi trois valeurs particulières : la valeur expérimentale $\theta_{13} = 0.004$ (droite bleue) encadrée entre $\theta_{13} = 0$ (droite rouge) et $\theta_{13} = 0.01$ (droite verte).

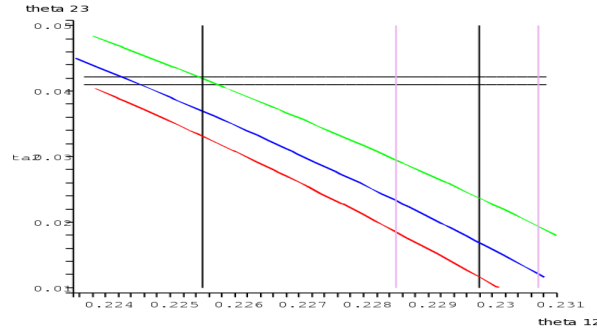


Fig. 4 : θ_{23} en fonction de θ_{12} (quarks) ; le cas général.

Nous pouvons observer que les valeurs expérimentales des angles de mélange des quarks apparaissent, dans le cas général, significativement plus proches des solutions aux contraintes exprimées par le système (3.42) que dans l'approximation précédente.

3.2.2 Le secteur des leptons

Etudions maintenant la deuxième solution exacte (3.39) des conditions d'unitarité, pour laquelle θ_{12} est de type standard et θ_{23} est maximal. Remarquons d'ores et déjà que cette dernière valeur se trouve être celle communément admise comme référence pour l'angle de mélange θ_{23} des neutrinos, pour lequel l'intervalle expérimental obtenu par la mesure des oscillations des neutrinos atmosphériques est $\theta_{\text{atm}} \simeq \theta_{23} = 43.3_{-3.8}^{+4.3}$ [29].

⁴Le signe "-" permet de retrouver l'équation (3.45) lorsque l'on revient au cas $\theta_{13} = 0 = \rho$

Le cas simplifié $\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$

Nous nous plaçons dans un voisinage de la configuration précédente paramétré de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{12} &= \theta_{12} + \epsilon, \\ \theta_{23} = \pi/4 \quad , \quad \tilde{\theta}_{23} &= \theta_{23} + \eta. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Comme pour les quarks, la déviation de l'unitarité s'exprime par celle des membres de gauche des équations (3.31) à (3.35) de la valeur zéro :

$$-\frac{1}{2}\eta^2(s_{12} + \epsilon c_{12}), \quad (3.53a)$$

$$\frac{1}{2}\eta^2(c_{12} - \epsilon s_{12}), \quad (3.53b)$$

$$-\eta s_{12}c_{12} + \epsilon(s_{12}^2 - c_{12}^2)(1 + \eta), \quad (3.53c)$$

$$-\eta(c_{12}^2 - s_{12}^2) + 4\epsilon s_{12}c_{12}(1 + \eta), \quad (3.53d)$$

$$\eta(1 + c_{12}^2) - 2\epsilon s_{12}c_{12}(1 + \eta), \quad (3.53e)$$

Considérons le canal (1, 2). La condition que la violation de l'absence des courants neutres non diagonaux $\{12\}$ et $\{21\}$ exprimée par (3.53c) soit égale à la violation de l'universalité pour les courants neutres diagonaux $\{11\}$ et $\{22\}$ donnée par (3.53d) se traduit par

$$-\eta s_{12}c_{12} + \epsilon(s_{12}^2 - c_{12}^2)(1 + \eta) = -\eta(c_{12}^2 - s_{12}^2) + 4\epsilon s_{12}c_{12}(1 + \eta). \quad (3.54)$$

Comme nous l'avons montré, la déviation par rapport à l'unitarité dans un système de fermions couplés non-dégénérés est due précisément à la différence entre les masses des différentes particules. Ceci nous conduit à supposer que l'amplitude de chacun des trois paramètres ϵ , η et ρ de déviation de l'unitarité croît avec l'écart entre les masses des particules mélangées respectivement par les angles θ_{12} et θ_{23} et θ_{13} . Supposons maintenant que la hiérarchie des masses présente chez les neutrinos suit le même schéma que chez les quarks, i.e. que l'écart entre les masses de la seconde et la troisième génération est beaucoup plus grand que l'écart existant entre les masses de la première et la deuxième génération⁵. Il s'ensuit alors que nous pouvons négliger les termes proportionnels à ϵ devant les termes en η dans l'équation (3.54), qui se ramène alors à $s_{12}c_{12} = c_{12}^2 - s_{12}^2$, d'où il vient directement

$$\tan(2\theta_{12}) = 2. \quad (3.55)$$

Notons que dans le cas de deux générations, seuls les termes en ϵ apparaissent dans (3.54), ce qui nous donne de retrouver l'équation $\tan(2\theta_{12}) = 1/2$ correspondant à l'angle de Cabibbo θ_c , i.e. l'angle de mélange θ_{12}^Q pour les quarks.

La valeur de θ_{12} correspondante $\theta_{12} = 31,7$ se situe dans l'intervalle expérimental obtenu pour cet angle par la mesure des oscillations des neutrinos solaires : $\theta_{\odot} \simeq \theta_{12} = 33.9_{-2.2}^{+2.4}$ [29].

⁵Un autre argument peut être avancé à l'appui de cette hypothèse : du fait que les trois angles jouent des rôles *a priori* symétriques, l'annulation simultanée de θ et $\tilde{\theta}$, montrée pour θ_{13} , a lieu également pour θ_{12} et θ_{23} . Une des conséquences est que les trois paramètres ϵ , η et ρ de déviation de l'unitarité doivent être proportionnels aux angles de mélange correspondants (ou à l'une de leurs puissances), respectivement θ_{12} et θ_{23} et θ_{13} . Dans le cas des leptons, ce phénomène vient confirmer le bien-fondé de notre hypothèse : en effet, l'angle θ_{23} correspondant au mélange maximal est supérieur à θ_{12} .

Par ailleurs, une autre conséquence très importante de la relation (3.55) (ainsi que de la relation parallèle (3.20) pour les quarks) est la suivante : du fait de

$$\tan(2\theta_{12}^Q) = \frac{1}{2} = \frac{1}{\tan(2\theta_{12}^L)} \quad (3.56)$$

nous obtenons directement et de manière exacte la relation de *complémentarité quarks-leptons* entre l'angle de Cabibbo et le deuxième angle de mélange des neutrinos [31, 32, 33] :

$$\theta_{12}^Q + \theta_{12}^L = \frac{\pi}{4}. \quad (3.57)$$

Depuis sa mise en évidence, cette relation n'a eu de cesse d'intriguer les physiciens. Elle a suscité de nombreux travaux visant en particulier à l'expliquer dans le cadre de théories d'unification quarks-leptons à de hautes échelles d'énergie, typiquement égales à celle des théories de grande unification (cf. en particulier [32, 33]). Notre résultat est d'autant plus remarquable que nous obtenons la relation de complémentarité quarks-leptons dans le simple cadre du Modèle Standard, sans postuler d'autre physique que celle, bien connue, des courants neutres.

Il est intéressant pour finir d'étudier la sensibilité de ces résultats par rapport à θ_{13} , dont la valeur réelle, si elle semble très petite, n'est cependant certainement pas nulle. Considérons en effet une petite valeur de l'angle θ_{13} (nous prendrons pour simplifier $\theta_{13} \approx \tilde{\theta}_{13}$). Les membres de gauche des équations (3.33) ($[12] = 0 = [21]$) et (3.34) ($||[11]| = |[22]|$) deviennent alors

$$\begin{aligned} & -2\eta s_{12}c_{12}s_{23}c_{23} + \epsilon(s_{12}^2 - c_{12}^2) + \eta s_{13}(c_{23}^2 - s_{23}^2)(c_{12}^2 - s_{12}^2), \\ & -2\eta s_{23}c_{23}(c_{12}^2 - s_{12}^2) + 4\epsilon s_{12}c_{12} - 2\eta s_{13}(c_{23}^2 - s_{23}^2)(2s_{12}c_{12} + \epsilon(c_{12}^2 - s_{12}^2)). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Dans ces deux expressions, les termes proportionnels à $\sin(\theta_{13})$ sont également proportionnels à $(c_{23}^2 - s_{23}^2)$, de sorte qu'ils s'annulent pour $\theta_{23} = \pi/4$. Ainsi, notre solution comportant l'angle θ_{23} maximal n'a pas de dépendance en θ_{13} , et est de ce fait stable par rapport à une variation de θ_{13} autour de 0.

Le cas général

Passons maintenant au cas général $\theta_{13} \neq 0 \neq \tilde{\theta}_{13}$ ($\rho \neq 0$), en nous plaçant dans un voisinage du cas unitaire standard, et en choisissant pour les angles θ_{12} et θ_{23} les valeurs déterminées précédemment :

$$\theta_{12} = \frac{1}{2} \arctan(2) \quad , \quad \tilde{\theta}_{12} = \theta_{12} + \epsilon, \quad (3.59)$$

$$\theta_{23} = \pi/4 \quad , \quad \tilde{\theta}_{23} = \theta_{23} + \eta, \quad (3.60)$$

$$\tilde{\theta}_{13} = \theta_{13} + \rho. \quad (3.61)$$

Nous suivons la même démarche que celle empruntée pour les quarks : partant à nouveau de la série (3.49) exprimant les déviations des courants neutres par rapport à l'unitarité, nous imposons successivement dans chacun des trois canaux (1,2), (2,3) et (1,3) que l'absence de courants neutres non diagonaux soit violée avec la même amplitude que l'universalité pour ces mêmes courants neutres. Pour chacune de ces trois conditions le choix du signe \pm lors de la suppression des valeurs absolues nous conduit à considérer

huit (i.e. 2^3) différentes relations du type $F(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}) = 0$. Attribuant à θ_{12} et θ_{23} les valeurs respectives de $\frac{1}{2} \arctan(2)$ et $\pi/4$, ces fonctions implicites deviennent finalement des équations dans l'angle θ_{13} , dont la résolution numérique nous permet de déterminer autant de valeurs possibles de cet angle de mélange, dont la valeur précise pour les leptons est actuellement une question toujours en discussion.

Nous obtenons donc huit solutions pour θ_{13} , qui se groupent en quatre solutions différentes avec leurs opposés. Parmi celles-ci, la solution obtenue par la combinaison de signes $(-, +, +)$ (ainsi que $(-, -, -)$ pour l'angle opposé) dans les équations :

$$\theta_{13} = \pm 5.7 \cdot 10^{-3}, \quad \sin^2(\theta_{13}) = 3.3 \cdot 10^{-5}. \quad (3.62)$$

satisfait la contrainte suivante, issue de l'expérience [29] :

$$\sin^2(\theta_{13}) \leq 0.032; \quad (3.63)$$

Ainsi, l'une des solutions des équations exprimant l'égalité des violations de l'universalité des courants neutres et de l'absence des courants neutres changeant la saveur, se trouve compatible avec la configuration des angles de mélange des neutrinos déterminée expérimentalement à ce jour (c'est-à-dire plus exactement avec l'état présent des contraintes expérimentales sur les angles de mélange des neutrinos, en particulier l'angle θ_{13} encore indéterminé).

3.3 Discussion

Les résultats précédents ont été établis indifféremment pour les angles de mélange paramétrant les deux matrices associées chacune à l'un des deux secteurs d'isospin donné ; en d'autres termes, dans le cas des quarks (respectivement des leptons), pour les angles correspondant à la matrice K_u des quarks de type u (resp. la matrice K_ν des neutrinos) comme pour ceux correspondant à la matrice K_d des quarks de type d (resp. la matrice K_ℓ des leptons chargés).

Or les valeurs des angles de mélange mesurées expérimentalement correspondent aux angles paramétrant le produit $K_u^\dagger K_d$ (resp. $K_\nu^\dagger K_\ell$) apparaissant dans les courants chargés, et considéré dans l'approche standard comme la matrice de mélange des quarks (resp. des leptons). Ces valeurs sont donc reliées *a priori* à une fonction des angles de mélange "réels" des quarks (resp. des leptons) de charges différentes, qui paramètrent les matrices K_u et K_d (resp. K_ν et K_ℓ) séparément. Ainsi dans le cas simple de deux générations de quarks, si les matrices de mélange K_u et K_d sont paramétrées comme des matrices de rotation d'angles respectifs θ_u et θ_d (voir 4.17), l'angle de Cabibbo paramétrant de la même manière la matrice $K_u^\dagger K_d$ s'exprime comme $\theta_c = \theta_u - \theta_d$. En revanche, le motif particulier de violation de l'unitarité que nous avons mis en évidence dans les courants neutres est réalisé lorsque les angles de mélange θ_u et θ_d eux-mêmes prennent la valeur de l'angle de Cabibbo déterminée par l'expérience.

Le problème est le même dans le cas des leptons. Si le phénomène d'oscillation des neutrinos n'est en lui-même déterminé que par leur seule matrice de mélange K_ν , la détection des neutrinos permettant la détermination expérimentale de ces oscillations, réalisée de manière indirecte à travers la détection de leptons chargés de masses définies dans les interactions faibles à courants chargés, fait quand à elle intervenir le produit $K_\nu^\dagger K_\ell$.

Le décalage apparaissant ainsi entre les résultats de notre approche et la réalité expérimentale peut cependant être résorbé en supposant l'alignement, dans l'un des secteurs, de la base des états propres de masse sur celle des états propres de saveur. Ce paradigme est assez naturel dans le cas des leptons, puisque le fait que les deux bases coïncident pour les leptons chargés repose sur de solides bases physiques (cf. chapitre 1). Dans le cas des quarks en revanche, il est plus difficile de le justifier, et de rendre compte de l'asymétrie qu'il génère entre les deux secteurs de quarks d'isospins différents. Nous en verrons cependant au chapitre 5 une justification, fondée sur l'invariance des courants chargés sous des rotations unitaires des fermions de saveur.

3.4 Conclusion

En conclusion, notre étude a montré que certaines solutions des équations exprimant, dans les courants neutres, l'égalité des violations de l'universalité et de l'absence des courants changeant la saveur, correspondent avec une très bonne approximation aux configurations d'angles de mélange déterminées expérimentalement pour les quarks comme pour les neutrinos ; ou, en d'autres termes, que les valeurs issues des mesures expérimentales des angles de mélange des quarks et des leptons sont compatibles avec la structure particulière de violation de l'unitarité de la matrice de mélange réalisée par les contraintes sus-mentionnées. La distinction entre les premiers et les seconds est établie sur la seule base des valeurs initiales adoptées pour certains des angles de mélange, et au voisinage desquelles est paramétrée la violation de l'unitarité.

Il va de soi qu'on ne peut tirer de tels résultats aucune conclusion quand à l'origine physique des valeurs des angles de mélange des fermions observées dans la nature. Notre travail ne prétend pas fournir de critère physique permettant d'expliquer ou de déterminer ces valeurs. Se situant à un niveau bien plus modeste, il pointe néanmoins une caractéristique assez remarquable des configurations des angles de mélange mesurées expérimentalement, une particularité *de fait*, dont nous sommes incapables à l'heure actuelle d'estimer la portée et la signification.

Chapitre 4

Une approche perturbative de la non-unitarité de la matrice de mélange

La non-unitarité de la matrice de mélange pour des systèmes de fermions non-dégénérés constitue le fondement de la démarche exposée dans les chapitres précédents. Nous l'avons établie sur la base d'arguments fondamentaux de Théorie Quantique des Champs, en démontrant que les états propres de masse de tels systèmes ne sont pas orthogonaux de manière générale, en raison précisément de la différence de leurs masses. Nous montrons dans le présent chapitre qu'il est possible de retrouver ce résultat à partir d'une approche perturbative : l'introduction de contre-termes finis pour annuler les transitions non diagonales apparaissant à une boucle entre différents états propres de masse conduit à définir une nouvelle base d'états propres de masse renormalisés. Cette base est non-orthonormale, et se trouve donc reliée à la base d'états propres de saveur par l'intermédiaire d'une matrice de mélange non-unitaire.

4.1 Transitions non-diagonales à une boucle

Considérons les deux premières familles de quarks. A l'ordre de l'arbre, les états propres de masse nus pour les quarks de type u comme pour ceux de type d forment une base orthonormale. Celle-ci est obtenue à partir de la base des états propres de saveur, supposée orthonormale, par une matrice de mélange unitaire issue de la diagonalisation de la matrice de masse classique M_0 :

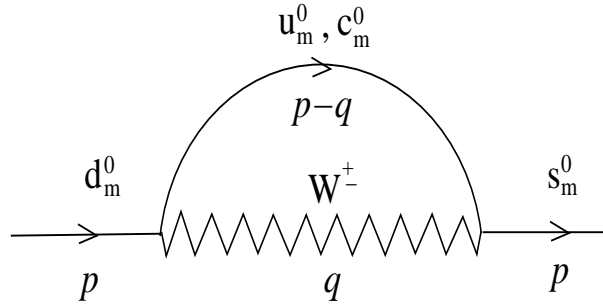
$$\text{diag}(m_d, m_s) = \mathcal{C}_{d0}^\dagger M_0 \mathcal{H}_{d0}. \quad (4.1)$$

Nous avons donc :

$$\begin{pmatrix} d_f \\ s_f \end{pmatrix}_L = \mathcal{C}_d^0 \begin{pmatrix} d_m^0 \\ s_m^0 \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} d_f \\ s_f \end{pmatrix}_R = \mathcal{H}_d^0 \begin{pmatrix} d_m^0 \\ s_m^0 \end{pmatrix}_R \quad (4.2)$$

$$\begin{pmatrix} u_f \\ c_f \end{pmatrix}_L = \mathcal{C}_u^0 \begin{pmatrix} u_m^0 \\ c_m^0 \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} u_f \\ c_f \end{pmatrix}_R = \mathcal{H}_u^0 \begin{pmatrix} u_m^0 \\ c_m^0 \end{pmatrix}_R \quad (4.3)$$

Les propagateurs matriciels dans la base nue des états propres de masse sont diagonaux du fait de l'absence de transitions entre différents états. Cependant, si nous passons à l'ordre d'une boucle dans le développement perturbatif, les corrections radiatives dues à l'auto-énergie entraînent l'apparition dans ces propagateurs de termes non diagonaux correspondant à des transitions entre états propres de masse différents, telles que la transition $d_m^0 \rightarrow s_m^0$ représentée ci-dessous :


 Fig.5 : Transitions $d_m^0 - s_m^0$ à une boucle

Ces transitions ont la forme d'un terme cinétique non-diagonal

$$f(p^2, m_u^2, m_c^2, m_W^2) \bar{s}_m^0 \not{p} (1 - \gamma^5) d_m^0, \quad (4.4)$$

où la fonction f est sans dimension et inclut les facteurs $g^2 \sin \theta_c \cos \theta_c (m_c^2 - m_u^2)$ (θ_c étant l'angle de Cabibbo). Leur amplitude est exprimée par le produit scalaire entre les champs fermioniques initiaux et finaux correspondant à des états propres de masse différents. En conséquence, elles détruisent l'orthonormalité de la base nue (d_m^0, s_m^0) des états propres de masse.

Pour conserver l'orthonormalité de la base (d_m^0, s_m^0) à l'ordre d'une boucle dans le développement perturbatif, il est nécessaire d'ajouter au Lagrangien des contre-termes de façon à supprimer les transitions non diagonales représentées Fig.1. En nous fondant sur le travail [34], nous pouvons montrer que l'introduction des contre-termes finis

$$-\left(A_d \bar{s}_m^0 \not{p} (1 - \gamma^5) d_m^0 + B_d \bar{s}_m^0 (1 - \gamma^5) d_m^0 + C_d \bar{s}_m^0 \not{p} (1 + \gamma^5) d_m^0 + D_d \bar{s}_m^0 (1 + \gamma^5) d_m^0 \right) \quad (4.5)$$

dans le Lagrangien, avec

$$A_d = \frac{m_s^2 f(p^2 = m_s^2) - m_d^2 f(p^2 = m_d^2)}{m_s^2 - m_d^2}, \quad C_d = \frac{m_s m_d (f(p^2 = m_s^2) - f(p^2 = m_d^2))}{m_s^2 - m_d^2},$$

$$B_d = -m_d C_d, \quad D_d = -m_s C_d, \quad (4.6)$$

entraîne l'annulation des termes cinétiques non diagonaux lorsque l'un des champs d_m^0 ou s_m^0 est sur couche de masse.

Les contre-termes (4.5), qui présentent tous une structure chirale, sont de deux types : des termes cinétiques, multipliant A_d et C_d , et des termes de masse, en facteur de B_d et C_d . En notant $\psi_{dm}^0 = \begin{pmatrix} d_m^0 \\ s_m^0 \end{pmatrix}$, ils s'écrivent respectivement, pour la partie cinétique

$$-A_d \bar{\psi}_{dmL}^0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \not{p} \psi_{dmL}^0 - C_d \bar{\psi}_{dmR}^0 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \not{p} \psi_{dmR}^0, \quad (4.7)$$

et pour la partie massive

$$-\bar{\psi}_{dmL}^0 \begin{pmatrix} & D_d \\ B_d & \end{pmatrix} \psi_{dmR}^0 - \bar{\psi}_{dmR}^0 \begin{pmatrix} B_d & \\ D_d & \end{pmatrix} \psi_{dmL}^0. \quad (4.8)$$

Le lagrangien complet, renormalisé à une boucle, s'écrit dès lors dans la base de masse :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_{dmL}^0 \begin{pmatrix} 1 & -A_d \\ -A_d & 1 \end{pmatrix} \not{p} \psi_{dmL}^0 + \bar{\psi}_{dmR}^0 \begin{pmatrix} 1 & -C_d \\ -C_d & 1 \end{pmatrix} \not{p} \psi_{dmR}^0$$

$$- \bar{\psi}_{dmL}^0 \begin{pmatrix} m_d & D_d \\ B_d & m_s \end{pmatrix} \psi_{dmR}^0 - \bar{\psi}_{dmR}^0 \begin{pmatrix} m_d & B_d \\ D_d & m_s \end{pmatrix} \psi_{dmL}^0. \quad (4.9)$$

4.2 Diagonalisation du lagrangien à une boucle

L'ajout des contre-termes de Shabalin (4.5) au Lagrangien initial conduit à un Lagrangien renormalisé non-diagonal aussi bien dans sa partie cinétique que dans celle relative aux masses. Nous cherchons alors dans un second temps à diagonaliser simultanément les matrices présentes dans ce nouveau Lagrangien, de façon à déterminer une nouvelle base d'états propres de masse "renormalisés" dans laquelle ce Lagrangien complet aura la même forme, diagonale, que le Lagrangien "nu" de départ. Cette procédure sera conduite en deux étapes, consistant à diagonaliser successivement et séparément les termes cinétiques dans un premier temps, puis les termes de masse.

Commençons donc par la partie cinétique, dont les matrices sont symétriques. Comme nous cherchons à obtenir des termes de même forme que les termes non renormalisés, la diagonalisation mise en oeuvre doit nous conduire à la matrice unité, et non à une matrice dont les éléments diagonaux soient égaux aux valeurs propres de la matrice initiale. En conséquence, nous ne pouvons pas suivre simplement la procédure standard. Alors que celle-ci mettrait en oeuvre, considérant que les matrices des termes cinétiques sont symétriques, des matrices unitaires, nous cherchons à "diagonaliser" les matrices des termes cinétiques par des matrices non unitaires.

Avant d'aller plus loin, penchons-nous sur cette dernière affirmation et montrons que la contrainte d'aboutir à une matrice unité conduit *in fine* à des matrices non unitaires, même dans le cas d'une diagonalisation standard. En effet, celle-ci s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -A_d \\ -A_d & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + A_d & 0 \\ 0 & 1 - A_d \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

où la matrice $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est unitaire et correspond à une rotation de $\frac{\pi}{4}$. Les termes cinétiques deviennent alors

$$\frac{1}{2}(1 + A_d)(\bar{d} + \bar{s}) \not{p} (d + s) + \frac{1}{2}(1 - A_d)(\bar{d} - \bar{s}) \not{p} (d - s). \quad (4.11)$$

Si nous voulons retrouver une matrice unité, il nous faut normaliser les états par, respectivement, $\frac{1}{\sqrt{1+A_d}}$ et $\frac{1}{\sqrt{1-A_d}}$. En définitive, la matrice de mélange apparaissant pour les termes cinétiques est donc

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+A_d}} & \frac{1}{\sqrt{1+A_d}} \\ \frac{1}{\sqrt{1-A_d}} & \frac{1}{\sqrt{1-A_d}} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

et n'est plus unitaire.

Nous cherchons donc des matrices non-unitaires vérifiant

$$\mathcal{V}_d^\dagger \begin{pmatrix} 1 & -A_d \\ -A_d & 1 \end{pmatrix} \mathcal{V}_d = \mathbb{1} = \mathcal{U}_d^\dagger \begin{pmatrix} 1 & -C_d \\ -C_d & 1 \end{pmatrix} \mathcal{U}_d. \quad (4.13)$$

En réalité, comme nous travaillons dans le cadre d'un développement perturbatif à l'ordre d'une boucle, il nous suffit que ces égalités soient satisfaites au premier ordre dans les paramètres A_d et C_d . On peut montrer que cela est réalisé par les matrices \mathcal{V}_d et \mathcal{U}_d suivantes :

$$\mathcal{V}_d = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{Ld} & \sin \varphi_{Ld} \\ -\sin \varphi_{Ld} + A_d \cos \varphi_{Ld} & \cos \varphi_{Ld} + A_d \sin \varphi_{Ld} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_d &\approx^{A_d \text{ petit}} \begin{pmatrix} \cos \varphi_{Ld} & \sin \varphi_{Ld} \\ -\sin(\varphi_{Ld} - A_d) & \cos(\varphi_{Ld} - A_d) \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_{Rd} & \sin \varphi_{Rd} \\ -\sin \varphi_{Rd} + C_d \cos \varphi_{Rd} & \cos \varphi_{Rd} + C_d \sin \varphi_{Rd} \end{pmatrix} \\ &\approx^{C_d \text{ petit}} \begin{pmatrix} \cos \varphi_{Rd} & \sin \varphi_{Rd} \\ -\sin(\varphi_{Rd} - C_d) & \cos(\varphi_{Rd} - C_d) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ces matrices dépendent respectivement des angles arbitraires φ_{Ld} et φ_{Rd} .

Les termes cinétiques se réécrivent alors

$$\bar{\psi}_{dmL}^0 \not{p} (\mathcal{V}_d^\dagger)^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} \psi_{dmL}^0 + \bar{\psi}_{dmR}^0 \not{p} (\mathcal{U}_d^\dagger)^{-1} \mathcal{U}_d^{-1} \psi_{dmR}^0, \quad (4.15)$$

ce qui conduit à définir une nouvelle base d'états

$$\chi_{dL} = \mathcal{V}_d^{-1} \psi_{dmL}^0 = \mathcal{V}_d^{-1} \mathcal{C}_{d0}^{-1} \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}, \quad \chi_{dR} = \mathcal{U}_d^{-1} \psi_{dmR}^0 = \mathcal{U}_d^{-1} \mathcal{H}_{d0}^{-1} \begin{pmatrix} d_{fR} \\ s_{fR} \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

dans laquelle ils retrouvent la forme diagonale habituelle qu'ils avaient avant l'introduction des contre-termes. Les matrices \mathcal{C}_{d0} et \mathcal{H}_{d0} , déjà vues plus haut, sont les deux matrices intervenant dans la diagonalisation bi-unitaire de la matrice de masse classique. Nous les choisissons paramétrées de la manière suivante :

$$\mathcal{C}_{d0} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{dL} & -\sin \theta_{dL} \\ \sin \theta_{dL} & \cos \theta_{dL} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_{d0} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{dR} & -\sin \theta_{dR} \\ \sin \theta_{dR} & \cos \theta_{dR} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Comme les matrices \mathcal{V}_d et \mathcal{U}_d ne sont pas unitaires, il en est de même des nouvelles matrices de mélange $\mathcal{C}_{d0} \mathcal{V}_d$ et $\mathcal{H}_{d0} \mathcal{U}_d$ reliant la base de saveur à la nouvelle base d'états propres de masse définie par les états $\chi_{L,R}$.

Passons maintenant à la partie du Lagrangien renormalisé relative aux termes de masse. Dans la nouvelle base d'états propres de masse $\chi_{L,R}$ issue de la diagonalisation (dans la matrice unité) des termes cinétiques, celle-ci s'écrit de la manière suivante :

$$\bar{\psi}_{dmL}^0 \begin{pmatrix} m_d & D_d \\ B_d & m_s \end{pmatrix} \psi_{dmR}^0 = \bar{\chi}_{dL} \left[\mathcal{V}_d^\dagger \begin{pmatrix} m_d & D_d \\ B_d & m_s \end{pmatrix} \mathcal{U}_d \right] \chi_{dR} \quad (4.18)$$

Nous diagonalisons cette fois-ci la nouvelle matrice de masse de la manière standard, par une transformation bi-unitaire (qui laisse invariants les termes cinétiques diagonaux) :

$$V_d^\dagger \left[\mathcal{V}_d^\dagger \begin{pmatrix} m_d & D_d \\ B_d & m_s \end{pmatrix} \mathcal{U}_d \right] U_d = \begin{pmatrix} \mu_d & \\ & \mu_s \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

A la suite de cette opération, nous voyons apparaître une nouvelle base d'états propres de masse, dans laquelle le Lagrangien renormalisé (incluant les contre-termes de Shabalin) a une forme diagonale, identique à celle du Lagrangien nu. Cette base, non-orthonormale, est constituée par les deux vecteurs

$$\xi_{dL} = V_d^{-1} \chi_{dL} = V_d^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} \mathcal{C}_{d0}^{-1} \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}, \quad \xi_{dR} = U_d^{-1} \chi_{dR} = U_d^{-1} \mathcal{U}_d^{-1} \mathcal{H}_{d0}^{-1} \begin{pmatrix} d_{fR} \\ s_{fR} \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

reliés à la base des états propres de saveur par les matrices de mélange non-unitaires $\mathcal{C}_{d0} \mathcal{V}_d V_d$ (fermions gauches) et $\mathcal{H}_{d0} \mathcal{U}_d U_d$ (fermions droits).

Considérons les fermions gauches. Nous paramétrons la matrice unitaire V_d de la manière suivante :

$$V_d = \begin{pmatrix} \cos \theta_{2Ld} & \sin \theta_{2Ld} \\ -\sin \theta_{2Ld} & \cos \theta_{2Ld} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

d'où nous obtenons

$$\mathcal{V}_d V_d = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) & \sin(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) \\ -\sin(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} - A_d) & \cos(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} - A_d) \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

puis finalement

$$\mathcal{C}_{d0} \mathcal{V}_d V_d = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} - \theta_{dL}) & \sin(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} - \theta_{dL}) \\ -\sin(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} - \theta_{dL}) & \cos(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} - \theta_{dL}) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

$$+ A_d \begin{pmatrix} -\sin \theta_{dL} \cos(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) & -\sin \theta_{dL} \sin(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) \\ \cos \theta_{dL} \cos(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) & \cos \theta_{dL} \sin(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

L'angle φ_{Ld} étant arbitraire, nous pouvons l'utiliser pour éliminer θ_{2Ld} : $\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} = 0$, ce qui nous permet d'obtenir finalement la matrice de mélange \mathcal{C}_d reliant $\begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}$ à ξ_{dL} :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_d \equiv \mathcal{C}_{d0} \mathcal{V}_d V_d &= \begin{pmatrix} \cos \theta_{dL} - A_d \sin \theta_{dL} & -\sin \theta_{dL} \\ \sin \theta_{dL} + A_d \cos \theta_{dL} & \cos \theta_{dL} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{A_d \text{ small}}{\approx} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{dL} + A_d) & -\sin \theta_{dL} \\ \sin(\theta_{dL} + A_d) & \cos \theta_{dL} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Cette matrice non-unitaire satisfait les relations

$$\mathcal{C}_d \mathcal{C}_d^\dagger \approx \begin{pmatrix} 1 - 2A_d \sin \theta_{dL} \cos \theta_{dL} & A_d(\cos^2 \theta_{dL} - \sin^2 \theta_{dL}) \\ A_d(\cos^2 \theta_{dL} - \sin^2 \theta_{dL}) & 1 + 2A_d \sin \theta_{dL} \cos \theta_{dL} \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

$$\mathcal{C}_d^\dagger \mathcal{C}_d = \begin{pmatrix} 1 & A_d \\ A_d & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{V}_d \mathcal{V}_d^\dagger. \quad (4.26)$$

L'inverse de cette même matrice de mélange est donné par

$$\mathcal{C}_d^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{dL} & \sin \theta_{dL} \\ -\sin \theta_{dL} - A_d \cos \theta_{dL} & \cos \theta_{dL} - A_d \sin \theta_{dL} \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

$$\approx \begin{pmatrix} \cos \theta_{dL} & \sin \theta_{dL} \\ -\sin(\theta_{dL} + A_d) & \cos(\theta_{dL} + A_d) \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Nous retrouvons donc exactement la même forme (aux phases près) que celle de la matrice de mélange (3.18) vue au chapitre 3, le paramètre perturbatif A_d correspondant au paramètre ϵ de violation de l'unitarité. De même, le produit

$$(\mathcal{C}_d^{-1})^\dagger \mathcal{C}_d^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1 + 2A_d \sin \theta_{dL} \cos \theta_{dL} & A_d(\sin^2 \theta_{dL} - \cos^2 \theta_{dL}) \\ A_d(\sin^2 \theta_{dL} - \cos^2 \theta_{dL}) & 1 - 2A_d \sin \theta_{dL} \cos \theta_{dL} \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

est strictement équivalent à son homologue non perturbatif du chapitre 3 (équation (3.19)) contrôlant les courants neutres dans la base de saveur (en supposant que ceux-ci s'écrivent dans la base de masse avec la matrice unité). Nous verrons à la fin de cette section que le résultat de l'approche perturbative est exactement le même que celui de l'approche générale fondée sur des arguments non perturbatifs de Théorie Quantique des Champs : les courants neutres du Lagrangien renormalisé à une boucle, dans la base de masse renormalisée (et non la base nue), sont déterminés par la matrice unité, de sorte qu'ils sont contrôlés par le produit $(\mathcal{C}_d^{-1})^\dagger \mathcal{C}_d^{-1}$ dans la base des états propres de saveur.

4.2.1 Résumé de la démarche perturbative

Il est bienvenu à ce stade de faire un résumé de la démarche suivie, pour faire ressortir plus clairement les étapes par lesquelles nous sommes passés du Lagrangien nu au Lagrangien effectif renormalisé à une boucle.

Nous partons, à l'ordre de l'arbre - c'est à dire au niveau classique - de deux bases nues de masse et de saveur, orthonormales et liées entre elles par une matrice de mélange unitaire.

En passant à l'ordre d'une boucle, les corrections radiatives détruisent l'orthonormalité de la base des états propres de masse en conférant aux transitions non-diagonales entre ces états une amplitude non nulle. Nous introduisons alors des contre-termes finis de sorte d'annuler les termes cinétiques non-diagonaux, et de conserver l'orthonormalité de la base nue des états propres de masse. Cette opération a pour effet d'altérer la matrice des termes cinétiques du Lagrangien complété, qui cesse d'être égale à l'unité, et celle des termes de masse, qui cesse d'être diagonale.

La matrice unité est rétablie dans les termes cinétiques au prix d'une transformation non-unitaire qui définit, à partir de la base nue des états propres de masse, une nouvelle base d'états χ non-orthonormale.

Puis nous exprimons la matrice de masse dans cette nouvelle base χ , avant de la diagonaliser par une transformation bi-unitaire qui ne change pas les termes cinétiques.

Cette dernière étape définit la base des états propres de masse renormalisés ξ , obtenue à partir de la base χ par l'une des transformations unitaires intervenant dans la diagonalisation. Elle est donc, comme cette dernière, non orthonormale, et se trouve reliée à la base des états propres de saveur par une matrice de mélange \mathcal{C} non unitaire.

L'approche perturbative que nous avons suivie nous conduit donc à retrouver le résultat dégagé sur la base d'un traitement plus général au chapitre 2, à savoir que les états propres de masse d'un système de fermions non dégénérés ne sont pas orthonormaux, et que la matrice de mélange les reliant à la base des états propres de saveur est par conséquent non unitaire. Dans les deux démarches, ce fait fondamental est établi comme la conséquence des corrections radiatives, en particulier la self-énergie, apparaissant en Théorie Quantique des Champs. Notre première argumentation, sans rentrer dans le détail du calcul perturbatif, remarque simplement que les corrections radiatives entraînent une dépendance dans l'impulsion des objets physiques comme le propagateur ou la matrice de masse, qui conjuguée à la différence des masses de particules entraîne la non-orthonormalité de la base de masse. De manière différente, l'approche perturbative permet de retrouver ce résultat en examinant de manière détaillée les corrections radiatives et la renormalisation du Lagrangien à une boucle.

4.3 Courants chargés et matrice de Cabibbo renormalisée

Ayant obtenu dans le canal (d, s) la forme de la matrice de mélange non unitaire reliant la base de saveur à la base non orthonormale des états propres de masse renormalisés, nous nous proposons dans cette partie de calculer la forme prise par la matrice de Cabibbo dans le Lagrangien renormalisé à une boucle. Nous verrons que le raisonnement juste, prenant en compte la totalité du Lagrangien tel que déterminé par l'invariance de jauge $SU(2)$, nous permet de retrouver une matrice de Cabibbo renormalisée qui reste unitaire.

4.3.1 Calcul naïf et matrice de Cabibbo non unitaire

Il est possible de suivre la même démarche que ci-dessus pour le canal (u, c) , en considérant des transitions non-diagonales entre les états u_m et c_m . Nous obtenons alors une forme semblable pour la matrice de mélange :

$$\mathcal{C}_u^{A_u \text{ small}} \approx \begin{pmatrix} \cos(\theta_{uL} + A_u) & -\sin \theta_{uL} \\ \sin(\theta_{uL} + A_u) & \cos \theta_{uL} \end{pmatrix}, \quad (4.30)$$

où A_u est le correspondant du paramètre A_d vu précédemment. Nous pouvons en déduire immédiatement la matrice de Cabibbo exprimée dans la nouvelle base ξ_{uL} et ξ_{dL} des états propres de masse renormalisés :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) - (A_d - A_u) \sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & -\sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) + A_u \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \\ \sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) + A_d \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL} + (A_d - A_u)) & -\sin(\theta_{dL} - \theta_{uL} - A_u) \\ \sin(\theta_{dL} - \theta_{uL} + A_d) & \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (4.31)$$

Celle-ci n'est pas unitaire, quelles que soient les valeurs des paramètres A_u et A_d .

4.3.2 Symétrie de jauge et hermiticité, ou comment retrouver une matrice de Cabibbo unitaire

En effet, du fait de l'invariance de jauge $SU(2)_L$, les termes cinétiques en \not{p} sont associés, à l'intérieur de la dérivée covariante, aux couplages des fermions avec les champs de jauge de l'interaction faible. Il en résulte que les contre-termes de Shabalin introduits pour la partie cinétique, ajoutant des composantes non-diagonales aux matrices présentes dans cette partie du Lagrangien, s'appliquent *de facto* simultanément aux termes d'interaction. En écrivant les termes cinétiques sous leur forme symétrique¹ $\bar{\Psi} \overleftrightarrow{\partial} \Psi \equiv \frac{1}{2}(\bar{\Psi} \partial \Psi - (\partial \bar{\Psi}) \Psi)$, le Lagrangien incluant ces contre-termes hérite donc de la forme suivante dans l'espace des états propres de masse :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = (\bar{u}_{mL}^0 \quad \bar{c}_{mL}^0 \quad \bar{d}_{mL}^0 \quad \bar{s}_{mL}^0) \gamma^\mu \left(A p_\mu + \frac{g}{2\sqrt{2}} (W_\mu^+ \{A, T^+\} + W_\mu^- \{A, T^-\}) \right. \\ \left. + \frac{g}{\cos \theta_w} Z_\mu^0 A (T^3 - \sin^2 \theta_w Q) \right) \begin{pmatrix} u_{mL}^0 \\ c_{mL}^0 \\ d_{mL}^0 \\ s_{mL}^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.32)$$

avec

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -A_u & & \\ -A_u & 1 & & \\ \hline & & 1 & -A_d \\ & & -A_d & 1 \end{array} \right), \quad (4.33)$$

où

$$T^+ = \left(\begin{array}{c|c} & C_0 \\ \hline & \end{array} \right), T^- = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline C_0^\dagger & \end{array} \right), T^3 = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \\ \hline & -\mathbb{1} \end{array} \right) \quad (4.34)$$

¹Voir à ce sujet le paragraphe 8.1.1.

sont les générateurs du groupe de jauge $SU(2)_L$, et

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} \frac{2}{3}\mathbb{1} & \\ \hline & -\frac{1}{3}\mathbb{1} \end{array} \right) \quad (4.35)$$

est l'opérateur de charge pour les quarks. Il est aisé de vérifier que le Lagrangien (4.32) est hermitien. La matrice \mathcal{C}_0 est la matrice de Cabibbo classique, définie comme $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{u0}^\dagger \mathcal{C}_{d0}$. Les matrices de mélange classiques \mathcal{C}_{u0} et \mathcal{C}_{d0} pour les secteurs u et d sont paramétrées, comme en (4.17) :

$$\mathcal{C}_{u0,d0} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{u,d;L} & -\sin \theta_{u,d;L} \\ \sin \theta_{u,d;L} & \cos \theta_{u,d;L} \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Les courants chargés s'écrivent alors sous la forme

$$\gamma^\mu \frac{g}{\sqrt{2}} \left(W_\mu^+ \begin{pmatrix} \bar{u}_{mL}^0 & \bar{c}_{mL}^0 \end{pmatrix} \mathcal{C} \begin{pmatrix} d_{mL}^0 \\ s_{mL}^0 \end{pmatrix} + W_\mu^- \begin{pmatrix} \bar{d}_{mL}^0 & \bar{s}_{mL}^0 \end{pmatrix} \mathcal{C}^\dagger \begin{pmatrix} u_{mL}^0 \\ c_{mL}^0 \end{pmatrix} \right), \quad (4.37)$$

où

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & -A_u \\ -A_u & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} 1 & -A_d \\ -A_d & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (4.38)$$

est la matrice de Cabibbo dans la base des états propres de masse nus. Cette dernière s'écrit dans la base des états propres de masse renormalisés

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \frac{1}{2} V_u^\dagger \mathcal{V}_u^\dagger \left[\begin{pmatrix} 1 & -A_u \\ -A_u & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} 1 & -A_d \\ -A_d & 1 \end{pmatrix} \right] \mathcal{V}_d V_d \\ &= \frac{1}{2} V_u^\dagger \mathcal{V}_u^\dagger \left((\mathcal{V}_u^\dagger)^{-1} \mathcal{V}_u^{-1} \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_0 (\mathcal{V}_d^\dagger)^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} \right) \mathcal{V}_d V_d \\ &= \frac{1}{2} \left(V_u^\dagger \mathcal{V}_u^{-1} \mathcal{C}_0 \mathcal{V}_d V_d + V_u^\dagger \mathcal{V}_u^\dagger \mathcal{C}_0 (\mathcal{V}_d^\dagger)^{-1} V_d \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

En tenant compte de l'égalité $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{u0}^\dagger \mathcal{C}_{d0} = (\mathcal{V}_u^\dagger)^{-1} (V_u^\dagger)^{-1} [\mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d] V_d^{-1} \mathcal{V}_d^{-1}$, nous en déduisons l'expression suivante :

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2} \left(V_u^\dagger \mathcal{V}_u^{-1} (\mathcal{V}_u^\dagger)^{-1} (V_u^\dagger)^{-1} [\mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d] + [\mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d] V_d^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} (\mathcal{V}_d^\dagger)^{-1} V_d \right). \quad (4.40)$$

Puis en utilisant la relation $\mathcal{V}_{u,d}^{-1} (\mathcal{V}_{u,d}^\dagger)^{-1} = 1 + A_{u,d} \begin{pmatrix} \sin 2\varphi_{Lu,Ld} & -\cos 2\varphi_{Lu,Ld} \\ -\cos 2\varphi_{Lu,Ld} & -\sin 2\varphi_{Lu,Ld} \end{pmatrix}$, nous obtenons le résultat intermédiaire :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d + \frac{1}{2} \left[A_u \begin{pmatrix} \sin 2(\varphi_{Lu} + \theta_{2Lu}) & -\cos 2(\varphi_{Lu} + \theta_{2Lu}) \\ -\cos 2(\varphi_{Lu} + \theta_{2Lu}) & -\sin 2(\varphi_{Lu} + \theta_{2Lu}) \end{pmatrix} \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d \right. \\ &\quad \left. + A_d \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d \begin{pmatrix} \sin 2(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) & -\cos 2(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) \\ -\cos 2(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) & -\sin 2(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \quad (4.41)$$

Finalement, en choisissant comme précédemment $\varphi_{Lu} + \theta_{2Lu} = 0 = \varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}$, nous pouvons déduire :

$$\mathfrak{C} = \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d - \frac{1}{2} \left[A_u \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d + A_d \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(A_d - A_u) \sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & (A_d + A_u) \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \\ (A_d + A_u) \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & (A_d - A_u) \sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & -\sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \\ \sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2}(A_d - A_u) \begin{pmatrix} -\sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & -\cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \\ \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & -\sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \end{pmatrix} \\
&\approx \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta}_c & \sin \tilde{\theta}_c \\ -\sin \tilde{\theta}_c & \cos \tilde{\theta}_c \end{pmatrix}. \tag{4.42}
\end{aligned}$$

où l'angle $\tilde{\theta}_c$ est donné par

$$\tilde{\theta}_c = \theta_{uL} - \theta_{dL} + \frac{1}{2}(A_u - A_d). \tag{4.43}$$

Ainsi, nous avons montré qu'en raison de la symétrie de jauge $SU(2)_L$ du Lagrangien, la matrice de Cabibbo apparaissant dans les courants chargés des états propres de masse renormalisés ne s'exprime plus comme le simple produit $\mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d$, mais se définit de manière plus compliquée *a priori*. Elle peut néanmoins se ramener, au premier ordre dans les paramètres A_u et A_d , à une matrice de rotation *ipso facto* unitaire. L'angle de Cabibbo "renormalisé" qui la paramètre dévie de sa valeur standard $\theta_{uL} - \theta_{dL}$ par la petite variation $\frac{1}{2}(A_d - A_u)$ dépendant des paramètres du développement perturbatif.

4.3.3 Conclusion : courants neutres dans la base des états propres de masse renormalisés

Pour conclure, tournons-nous vers les courants neutres. Leur expression dans la base des états propres de masse nus est donnée par le Lagrangien (4.32) :

$$\begin{aligned}
&\gamma^\mu \frac{g}{\cos \theta_w} Z_\mu^0 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) \begin{pmatrix} \bar{u}_{mL}^0 & \bar{c}_{mL}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -A_u \\ -A_u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{mL}^0 \\ c_{mL}^0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) \begin{pmatrix} \bar{d}_{mL}^0 & \bar{s}_{mL}^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -A_d \\ -A_d & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{mL}^0 \\ s_{mL}^0 \end{pmatrix} \right). \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Après diagonalisation, ils s'écrivent simplement dans la base non orthonormale des états propres de masse renormalisés

$$\xi_{u,L} = V_u^{-1} \mathcal{V}_u^{-1} \begin{pmatrix} u_{mL}^0 \\ c_{mL}^0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \xi_{d,L} = V_d^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} \begin{pmatrix} d_{mL}^0 \\ s_{mL}^0 \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
&\gamma^\mu \frac{g}{\cos \theta_w} Z_\mu^0 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) \bar{\xi}_{u,L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi_{u,L} \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) \bar{\xi}_{d,L} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xi_{d,L} \right). \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Ainsi, à une boucle, le Lagrangien des courants neutres dans la base des états propres de masse renormalisés est déterminé par la matrice unité. De l'étude des courants chargés

et neutres, nous déduisons donc que les générateurs du groupe de jauge $SU(2)_L$ dans la base des états propres de masse renormalisés sont donnés par

$$\hat{T}^+ = \left(\begin{array}{c|c} & \mathfrak{C} \\ \hline & \end{array} \right), \hat{T}^- = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline \mathfrak{C}^\dagger & \end{array} \right), \hat{T}^3 = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \\ \hline & -\mathbb{1} \end{array} \right). \quad (4.47)$$

L'unitarité de la matrice de Cabibbo renormalisée \mathfrak{C} , montrée dans le paragraphe précédent, garantit la fermeture de l'algèbre : $[\hat{T}^+, \hat{T}^-] = 2\hat{T}^3$, et assure ainsi que ces trois matrices forment bien une représentation du groupe de jauge $SU(2)_L$.

L'approche perturbative suivie dans cette partie apparaît donc pleinement cohérente en elle-même comme avec l'approche "générale" développée dans les chapitres précédents. Elle aboutit par un autre chemin au même résultat fondamental, qui sert de fondement à notre étude des angles de mélange des quarks et des leptons : en Théorie Quantique des Champs, les courants neutres sont contrôlés, dans la base des états propres de masse renormalisés, par la matrice unité. En revanche ils sont déterminés, dans la base des états propres de saveur, par le produit $(\mathcal{C}^{-1})^\dagger \mathcal{C}^{-1}$ où \mathcal{C} est la matrice de mélange non-unitaire reliant les deux bases.

Chapitre 5

Symétries, angles de mélange et matrices de masse

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux transformations sur les états propres de saveur, en cherchant tout d'abord à mettre en évidence la présence de symétries reliées à la structure particulière de la déviation de l'unitarité de la matrice de mélange dans les courants neutres qui se trouve réalisée dans la nature, comme nous l'avons montré au chapitre 3, par les angles de mélange des quarks et des leptons. Puis nous proposons une première ébauche de réflexion pour établir des liens entre notre démarche et les approches les plus communément suivies pour rendre compte des angles de mélange observés dans la nature, fondées la plupart du temps sur la matrice de mélange. Enfin nous considérons les transformations unitaires sur les fermions de saveur dans le cadre de l'approche perturbative exposée au chapitre précédent, et nous montrons qu'il est toujours possible d'aligner dans l'un des deux secteurs (i.e. quarks de type u ou d , neutrinos ou leptons chargés) la base de masse sur la base de saveur, tout en préservant la structure des courants chargés, ce qui nous permet de conclure par là notre discussion sur les différentes bases d'états propres (initiée au chapitre 1 et continuée au chapitre 3) en retrouvant le point de vue communément admis et mis en oeuvre dans le Modèle Standard.

Nous nous limiterons dans tout le chapitre au cas de deux générations, pour lequel les motifs de symétrie sont plus évidents.

5.1 Symétrie horizontale

La démarche que nous avons suivie nous a conduit à des configurations d'angles de mélange reproduisant avec une grande fidélité celles mesurées expérimentalement pour les quarks et les leptons. Elle se fonde sur une structure particulière des courants neutres liée à la déviation de l'unitarité des matrices de mélange, qui confère à ces dernières une forme bien précise pouvant s'interpréter en termes de symétries horizontales, reliant dans les différentes familles les particules de même isospin $SU(2)$ (ou, ce qui est équivalent, de même charge électromagnétique).

Considérons pour fixer les idées le courant neutre reliant les quarks d et s . Comme nous l'avons vu, celui-ci est déterminé par le produit $(\mathcal{C}^{-1})^\dagger \mathcal{C}^{-1}$, où \mathcal{C} est la matrice de mélange 2×2 des quarks de type d dans le cas de deux familles.

Lorsque \mathcal{C} dévie de l'unitarité, le Lagrangien des courants neutres s'écrit de la manière

la plus générale dans la base des états propres de saveur

$$\mathcal{L} = \frac{g}{2 \cos \theta_w} Z_\mu^0 [\alpha \bar{d}_f \gamma^\mu d_f + \beta \bar{s}_f \gamma^\mu s_f + \delta \bar{d}_f \gamma^\mu s_f + \zeta \bar{s}_f \gamma^\mu d_f], \quad (5.1)$$

avec $\alpha \neq \beta$ et $\delta \neq 0 \neq \zeta$ exprimant respectivement la violation de l'universalité et la présence de courants neutres changeant la saveur. Or la propriété "maîtresse" que nous avons mise en évidence au chapitre 3, comme jouant un rôle majeur dans la physique des angles de mélange, caractérise les conséquences de la déviation de la matrice de mélange par rapport à l'unitarité au niveau des courants neutres. Elle consiste dans l'égalité des déviations des courants neutres par rapport à l'universalité et à l'absence de courants changeant la saveur, et se traduit dans le Lagrangien (5.1) par la relation suivante entre les coefficients

$$\delta = \zeta = \pm(\alpha - \beta) \quad (5.2)$$

qui entraîne

$$\mathcal{L} = \frac{g}{2 \cos \theta_w} Z_\mu^0 [\alpha \bar{d}_f \gamma^\mu d_f + \beta \bar{s}_f \gamma^\mu s_f \pm (\alpha - \beta) \bar{d}_f \gamma^\mu s_f \pm (\alpha - \beta) \bar{s}_f \gamma^\mu d_f]. \quad (5.3)$$

Ce Lagrangien peut se réécrire sous la forme

$$\mathcal{L} = \frac{g}{2 \cos \theta_w} Z_\mu^0 \left[(\alpha + \beta) \frac{\bar{d}_f \gamma^\mu d_f + \bar{s}_f \gamma^\mu s_f}{2} \pm (\alpha - \beta) \left(\frac{\bar{d}_f \gamma^\mu d_f - \bar{s}_f \gamma^\mu s_f}{2} + \bar{d}_f \gamma^\mu s_f + \bar{s}_f \gamma^\mu d_f \right) \right]$$

faisant apparaître, dans le second terme, les trois composantes du triplet de courants $[\frac{1}{2}(\bar{d}_m \gamma_L^\mu d_m - \bar{s}_m \gamma_L^\mu s_m), \bar{d}_m \gamma_L^\mu s_m, \bar{s}_m \gamma_L^\mu d_m]$ dont les charges génèrent un groupe $SU(2)$. Grâce à l'indétermination en signe (\pm) du terme en $(\alpha - \beta)$ dans (5.3), la propriété caractéristique (5.2) de ce Lagrangien est invariante sous la permutation $S_2 : d \rightarrow s, s \rightarrow d$ qui se confond à deux dimensions avec le centre du groupe $SU(2)$ qui lui est sous-jacent. Le Lagrangien lui-même n'est cependant pas invariant, et à ce titre le groupe S_2 ne constitue pas un groupe de symétrie.

Nous avons montré par ailleurs que la matrice de mélange était paramétrée au voisinage de l'unitarité par $\hat{\theta} = \theta + \epsilon$, c'est à dire

$$\mathcal{C}^{-1}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin(\theta + \epsilon) & \cos(\theta + \epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta - \epsilon \cos \theta & \cos \theta - \epsilon \sin \theta \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Le courant neutre résultant présente par conséquent la structure suivante

$$(\mathcal{C}^{-1})^\dagger(\theta) \mathcal{C}^{-1}(\theta) = \mathbb{1} + 2\epsilon T_z(\theta), \quad (5.5)$$

où la matrice $T_z(\theta)$ est donnée par

$$T_z(\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Quelle que soit la valeur de l'angle θ , la transformation unitaire sur les états fermioniques

$$\Omega_\theta(a, b) = e^{i(a + b T_z(\theta))} \quad (5.7)$$

où a et b sont des paramètres complexes arbitraires, satisfait la relation

$$\Omega_\theta(a, b) [(\mathcal{C}^{-1})^\dagger(\theta)\mathcal{C}^{-1}(\theta)] \Omega_\theta^\dagger(a, b) = (\mathcal{C}^{-1})^\dagger(\theta)\mathcal{C}^{-1}(\theta). \quad (5.8)$$

Elle laisse de ce fait invariant le Lagrangien des courants neutres

$$\mathcal{L} = \frac{g}{2 \cos \theta_w} \gamma^\mu Z_\mu^0 \bar{\Psi}_f ((\mathcal{C}^{-1})^\dagger \mathcal{C}^{-1}) \Psi_f \quad (5.9)$$

$$= \frac{g}{2 \cos \theta_w} \gamma^\mu Z_\mu^0 \bar{\Psi}_f \begin{pmatrix} \alpha & \beta - \alpha \\ \beta - \alpha & \beta \end{pmatrix} \Psi_f. \quad (5.10)$$

Pour un angle θ donné quelconque, l'ensemble des transformations $\Omega_\theta(a, b)$, où a et b décrivent l'ensemble des nombres complexes, forme de manière évidente un groupe :

$$\Omega_\theta(a, b) \Omega_\theta(a', b') = \Omega_\theta(a + a', b + b'). \quad (5.11)$$

Ce groupe est le groupe horizontal de symétrie du Lagrangien des courants neutres paramétrés par l'angle θ dans la base des états propres de saveur.

Les courants conservés correspondants sont obtenus à partir du Lagrangien total ajoutant, à celui des courants neutres précédent, la partie cinétique $i\bar{\Psi}_f \gamma^\mu \partial_\mu \Psi$:

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Psi_f)} \delta \Psi_f. \quad (5.12)$$

Ils s'écrivent respectivement $\bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_f$ et $\bar{\Psi}_f \gamma^\mu T(\theta) \Psi_f$, et s'identifient donc naturellement aux courants physiques de l'interaction électrofaible : courant électromagnétique et courant neutre.

Par ailleurs, dans la base des vecteurs propres de Ω

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{1 + \sin 2\theta} \\ \sqrt{1 - \sin 2\theta} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \sin 2\theta} \\ \sqrt{1 + \sin 2\theta} \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

la matrice $T(\theta)$ prend la forme diagonale

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = 2T^3. \quad (5.14)$$

et la transformation horizontale $\Omega_\theta(a, b)$ devient

$$\Omega_\theta(a, b) = e^{i(a+bT^3)}, \quad (5.15)$$

c'est à dire, à une phase arbitraire près, une transformation $U(1)$ par l'un des générateurs, T^3 , de la symétrie $SU(2)$ mise en évidence plus haut dans le triplet de courants neutres du canal (d, s) .

Pour finir, nous avons vu que le groupe des transformations (5.7) constitue un groupe de symétrie du Lagrangien des courants neutres dans la base de saveur, et ce, quelle que soit la valeur de l'angle θ paramétrant la matrice de mélange. Or la propriété maîtresse régissant les angles de mélange impose une structure particulière à la matrice de mélange et donc aux courants neutres, qui transparaît dans le lagrangien (5.3) vu plus haut :

$$(\mathcal{C}^{-1})^\dagger \mathcal{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta - \alpha \\ \beta - \alpha & \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha + \beta}{2} \mathbb{1} + \frac{\alpha - \beta}{2} \sqrt{5} T, \quad (5.16)$$

où $T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. En fonction du paramétrage (5.4), la structure (5.16) équivaut à la condition $\cos(2\theta) = 2\sin(2\theta)$, c'est à dire $\tan(2\theta) = 1/2$, qui n'est autre que la relation vérifiée avec une grande précision par l'angle de Cabibbo. Par conséquent, à deux dimensions, le groupe de symétrie du Lagrangien des courants neutres effectivement réalisé dans la nature est le groupe des transformations Ω_{θ_c} paramétré par l'angle de Cabibbo.

5.2 Angles de mélange et matrices de masse

La démarche que nous avons adoptée permet d'obtenir une détermination des angles de mélange à partir de propriétés physiques des courants neutres dans la base de saveur ; elle est en cela originale et totalement indépendante de la plupart des approches phénoménologiques actuellement suivies pour rendre compte des angles de mélange déterminés à partir de l'expérience, qui toutes reposent sur la recherche de "textures" pour la matrice de masse des quarks ou des neutrinos, c'est-à-dire de configurations particulières de ces dernières susceptibles de faire apparaître les angles de mélange mesurés par l'expérience (voir par exemple [6, 7, 8, 9] et les références internes). La recherche de ces textures est liée à celle de symétries de saveur parmi les quarks ou les leptons, dont elles constituent l'expression au niveau de la matrice de masse (c'est le cas notamment de la symétrie de permutation S_3 pour les leptons qui peut faire émerger le mélange tri-bimaximal, cf. [35, 36, 37, 38] et les références internes). Or, ce type d'approche fondée sur la matrice de masse souffre de plusieurs défauts : d'une part, une matrice de masse unique et constante n'est pas pertinente pour décrire les système couplés non dégénérés en TQC [11] ; d'autre part, les textures ne sont pas stables sous des transformations unitaires des fermions, et ne peuvent de ce fait représenter de véritables propriétés physiques des systèmes considérés [12].

Il doit néanmoins exister des ponts entre notre étude sur les courants neutres et les travaux fondés sur les matrices de masse. En effet, la matrice de mélange \mathcal{C} présente dans les courants neutres sous la forme du produit $(\mathcal{C}^{-1})^\dagger \mathcal{C}^{-1}$ n'est autre que la matrice diagonalisant la matrice de masse, c'est à dire la matrice constituée des vecteurs propres de cette dernière. Il est dès lors légitime de chercher d'éventuelles relations entre les angles de mélange déterminés *via* notre procédure et la matrice de masse. La question se pose en ces termes : dans quelle mesure des contraintes sur les matrices de mélange, telles que celles que nous avons pu mettre en évidence dans les courants neutres, peuvent-elles engendrer des contraintes sur la matrice de masse qu'elles diagonalisent ?

Sans prétendre apporter à cette question de réponse exhaustive, nous montrons dans ce paragraphe qu'il est possible d'établir un lien entre une matrice de masse constante symétrique et les courants neutres au voisinage de l'unitarité de la matrice de mélange, en faisant apparaître de nouveau un groupe de symétrie $SU(2)$ de saveur sous-jacent.

5.2.1 Rappels sur la matrice de masse en Théorie Quantique des Champs

En Théorie Quantique des Champs, pour un système de fermions couplés non dégénérés, travailler avec une matrice de masse unique ne peut être qu'une approximation, au même titre qu'une matrice de mélange unitaire.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la TQC impose de travailler avec une matrice de masse renormalisée dépendant de l'échelle en énergie p considérée. Celle-ci est définie

à partir du propagateur complet, incluant à tous les ordres les corrections radiatives dues à l'auto-énergie $\Sigma(p)$:

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)} \equiv \frac{i}{\not{p} - M(p)}, \quad (5.17)$$

c'est à dire $M(p) = m_0 + \Sigma(p)$ (m_0 étant la masse nue). Les valeurs propres de M sont les masses physiques p_i , c'est à dire les pôles du propagateur complet $S(p)$. Elles sont solutions de l'équation

$$\det(\not{p} - M(p)) = 0 \quad (5.18)$$

Pour une masse p_i donnée quelconque, $M(p_i)$ admet un système de n vecteurs propres orthonormés. L'un de ceux-ci correspond à la masse physique p_i , tandis que les $n - 1$ autres sont des états non physiques. Les états propres de masse appartiennent donc à des bases orthonormales différentes, et ne forment pas eux-mêmes, en général, une base orthonormale.

Ainsi, pour décrire un système de n particules non-dégénérées, n matrices de masses distinctes sont nécessaires, comme cela avait déjà été établi pour les bosons dans le cadre d'une étude des systèmes binaires de mésons neutres [4, 11]. Une matrice de masse unique et constante ne peut être qu'une approximation limitée pour un traitement rigoureux en TQC.

5.2.2 Matrice de masse et courants neutres

Après cette mise en garde, nous commençons par nous placer dans l'approximation sus-mentionnée et considérons un système binaire pourvu d'une matrice de masse symétrique réelle $M = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, de valeurs propres m_1 et m_2 . Cette matrice peut s'écrire sous la forme

$$M = m + \frac{\Delta m}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad m = \frac{m_1 + m_2}{2}, \quad \Delta m = m_1 - m_2, \quad (5.19)$$

où l'angle θ est obtenu à la suite de la diagonalisation de M , par

$$\tan 2\theta = \frac{2c}{a - b}. \quad (5.20)$$

Remarquons tout d'abord qu'il est possible d'ajouter à la matrice de masse une matrice constante $\kappa \mathbb{1}$, où κ est un paramètre quelconque, sans changer Δm ni l'angle de mélange θ : on voit ainsi qu'à un angle de mélange donné peuvent être associées une infinité de matrices de masse distinctes. Essayons de caractériser l'ensemble de ces matrices, c'est à dire l'ensemble des matrices du type défini plus haut (symétriques réelles) pour lesquelles $\frac{2c}{a-b} = u$, pour u une constante réelle quelconque. Ces matrices sont de la forme

$$\Theta(u) = \begin{pmatrix} a & \frac{u}{2}(a-b) \\ \frac{u}{2}(a-b) & b \end{pmatrix} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & -1 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

et forment, pour un u donné quelconque, un groupe abélien réel dont deux représentants particuliers sont $\mathbb{1}$ et $\mathcal{T}(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & -1 \end{pmatrix}$, avec $\mathcal{T}^2(u) = 1$.

D'autre part, nous avons montré dans les chapitres précédents (équations (3.19) et (4.29)) que la déviation de la matrice de mélange par rapport à l'unitarité entraînait, dans un voisinage du cas unitaire :

$$(C^{-1})^\dagger C^{-1} - 1 = \epsilon \begin{pmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Nous pouvons en déduire une relation très simple entre le courant neutre (contrôlé par le produit $(C^{-1})^\dagger C^{-1}$) et la matrice de masse M :

$$\frac{(C^{-1})^\dagger C^{-1} - \mathbb{1}}{2\epsilon}(\theta) = \frac{M - m}{\Delta m}(\theta - \frac{\pi}{4}). \quad (5.23)$$

Considérons maintenant les trois générateurs 2×2 hermitiens

$$\mathcal{T}_x(u) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_y(u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_z(u) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} u & -1 \\ -1 & -u \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Ceux-ci satisfont les relations de commutation $[\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j] = i\epsilon_{ijk}\mathcal{T}_k$, et forment donc une représentation de l'algèbre de Lie du groupe $SU(2)$, définie de manière continue par le paramètre u . Ils sont reliés aux générateurs standards $\frac{1}{2}\sigma_i, i = 1, 2, 3$ par les relations

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_x(u) \\ \mathcal{T}_z(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} u & 1 \\ -1 & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_1 \\ \frac{1}{2}\sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_y = \sigma_2, \quad (5.25)$$

et se ramènent à ces derniers dans la limite $u \rightarrow +\infty$.

En choisissant le paramétrage $u = \tan(2\theta)$:

$$\mathcal{T}_x(\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_y(\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_z(\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

nous pouvons écrire de manière très simple les termes de masse et de courants neutres en fonction des générateurs précédents :

$$M = m + \Delta m \mathcal{T}_x(\theta) \quad (5.27)$$

$$(C^{-1})^\dagger C^{-1} = \mathbb{1} + 2\epsilon \mathcal{T}_z(\theta). \quad (5.28)$$

Le générateur \mathcal{T}_y génère la transformation de rotation

$$e^{2i\varphi \mathcal{T}_y} = \cos \varphi + 2i\mathcal{T}_y \sin \varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

qui transforme \mathcal{T}_x et \mathcal{T}_z l'un dans l'autre de la manière suivante :

$$e^{2i\varphi \mathcal{T}_y} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_x(\theta) \\ \mathcal{T}_z(\theta) \end{pmatrix} e^{-2i\varphi \mathcal{T}_y} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_x(\theta) \\ \mathcal{T}_z(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_x(\theta - \varphi) \\ \mathcal{T}_z(\theta - \varphi) \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

En particulier, pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $e^{i\frac{\pi}{2}\mathcal{T}_y}$ tourne les fermions de $\frac{\pi}{4}$ et échange les deux générateurs : $\mathcal{T}_x(u) \rightarrow -\mathcal{T}_z(u)$, $\mathcal{T}_z(u) \rightarrow \mathcal{T}_x(u)$.

5.3 Transformations unitaires des fermions de saveur

Nous avons mentionné en ouverture de la partie précédente que les textures des matrices de masse présentaient l'inconvénient majeur d'être instables sous des transformations unitaires des champs fermioniques. Nous nous proposons maintenant d'étudier la stabilité de la démarche perturbative exposée au chapitre précédent sous ces mêmes transformations. Bien que celles-ci ne constituent pas des symétries du Lagrangien, elles laissent invariante la procédure de renormalisation à l'aide des contre-termes de Shabalin, ainsi que la valeur de l'angle de Cabibbo qui en constitue l'aboutissement.

5.3.1 Transformations unitaires générales

Nous appliquons aux quarks de type u et de type d deux transformations unitaires arbitraires et distinctes Ω_u et Ω_d :

$$\begin{pmatrix} d'_{fL} \\ s'_{fL} \end{pmatrix} = \Omega_d \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u'_{fL} \\ c'_{fL} \end{pmatrix} = \Omega_u \begin{pmatrix} u_{fL} \\ c_{fL} \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Sous ces transformations, les couplages de Yukawa du Lagrangien prennent la forme

$$\begin{aligned} & (\bar{d}_{fL} \quad \bar{s}_{fL}) M_d \begin{pmatrix} d_{fR} \\ s_{fR} \end{pmatrix} + (\bar{u}_{fL} \quad \bar{c}_{fL}) M_u \begin{pmatrix} u_{fR} \\ c_{fR} \end{pmatrix} \\ &= (\bar{d}'_{fL} \quad \bar{s}'_{fL}) \Omega_d M_d \begin{pmatrix} d_{fR} \\ s_{fR} \end{pmatrix} + (\bar{u}'_{fL} \quad \bar{c}'_{fL}) \Omega_u M_u \begin{pmatrix} u_{fR} \\ c_{fR} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Les matrices de masses classiques des canaux (u, c) et (d, s) sont donc multipliées à gauche respectivement par Ω_u et Ω_d . Il en est de même des matrices de mélange qui diagonalisent les précédentes : celles-ci deviennent $\hat{\mathcal{C}}_{u0} = \Omega_u \mathcal{C}_{u0}$ et $\hat{\mathcal{C}}_{d0} = \Omega_d \mathcal{C}_{d0}$. En conséquence la base des états propres de masse classiques n'est pas affectée par la transformation, mais elle est reliée à la base de saveur transformée par les nouvelles matrices de mélange :

$$\begin{pmatrix} d^0_{mL} \\ s^0_{mL} \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{C}}_{d0}^\dagger \begin{pmatrix} d'_{fL} \\ s'_{fL} \end{pmatrix} = \mathcal{C}_{d0}^\dagger \Omega_d^\dagger \begin{pmatrix} d'_{fL} \\ s'_{fL} \end{pmatrix} = \mathcal{C}_{d0}^\dagger \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

$$\begin{pmatrix} u^0_{mL} \\ c^0_{mL} \end{pmatrix} = \hat{\mathcal{C}}_{u0}^\dagger \begin{pmatrix} u'_{fL} \\ c'_{fL} \end{pmatrix} = \mathcal{C}_{u0}^\dagger \Omega_u^\dagger \begin{pmatrix} u'_{fL} \\ c'_{fL} \end{pmatrix} = \mathcal{C}_{u0}^\dagger \begin{pmatrix} u_{fL} \\ c_{fL} \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Comme notre approche perturbative est construite à partir du Lagrangien exprimé dans la base des états propres de masse, elle demeure par conséquent entièrement inchangée sous les transformations unitaires (5.31) des états propres de saveur. A l'instar des états classiques, les états propres de masse renormalisés restent les mêmes, et seule est transformée la matrice qui les relie à la nouvelle base de saveur :

$$\chi_{dL} = \mathcal{V}_d^{-1} \begin{pmatrix} d^0_{mL} \\ s^0_{mL} \end{pmatrix} = \mathcal{V}_d^{-1} \mathcal{C}_{d0}^\dagger \Omega_d^\dagger \begin{pmatrix} d'_{fL} \\ s'_{fL} \end{pmatrix} = \mathcal{V}_d^{-1} \mathcal{C}_{d0}^\dagger \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

$$\xi_{dL} = V_d^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} \begin{pmatrix} d^0_{mL} \\ s^0_{mL} \end{pmatrix} = V_d^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} \mathcal{C}_{d0}^\dagger \Omega_d^\dagger \begin{pmatrix} d'_{fL} \\ s'_{fL} \end{pmatrix} = V_d^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} \mathcal{C}_{d0}^\dagger \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

En conclusion, l'angle de Cabibbo obtenu par l'approche perturbative que nous avons exposée dans le chapitre précédent est bien une grandeur physique invariante sous les transformations unitaires des états propres de saveur.

Examinons maintenant les conséquences de ces transformations sur la structure du Lagrangien. Il est utile d'exprimer dans cette perspective une transformation unitaire générale Ω dans la base constituée par les générateurs du groupe $U(2)$ que sont $\mathbb{1}$, $\mathcal{T}_x(\theta)$, $\mathcal{T}_y(\theta)$ et $\mathcal{T}_z(\theta)$ pour n'importe quelle valeur de l'angle θ , en particulier θ_u et θ_d :

$$\Omega = e^{i(\alpha + \beta_x \mathcal{T}_x(\theta) + \beta_y \mathcal{T}_y(\theta) + \beta_z \mathcal{T}_z(\theta))}. \quad (5.37)$$

D'autre part, les termes de courants neutres (5.28) et de masse (5.27) du Lagrangien sont déterminés respectivement par les matrices \mathcal{T}_x et \mathcal{T}_z . Nous avons déjà montré, dans la section (5.1), que les premiers étaient invariants sous la transformation particulière $\Omega_z = e^{i(\alpha + \beta_z \mathcal{T}_z(\theta))}$; on montre de manière strictement parallèle que les seconds sont invariants sous $\Omega_x = e^{i(\alpha + \beta_x \mathcal{T}_x(\theta))}$.

Sous la transformation la plus générale (5.37) des champs fermioniques de saveur, les deux termes deviennent

$$\begin{aligned} \Omega \mathcal{T}_x(\theta) \Omega^\dagger &\approx \mathcal{T}_x \left(\theta - \frac{\beta_y}{2} \right) - \beta_z \mathcal{T}_y, \\ \Omega \mathcal{T}_z(\theta) \Omega^\dagger &\approx \mathcal{T}_z \left(\theta - \frac{\beta_y}{2} \right) + \beta_x \mathcal{T}_y. \end{aligned} \quad (5.38)$$

De même, il est possible d'exprimer, au premier ordre dans les paramètres A_u et A_d , les courants chargés dans la base des états propres de saveur en fonction de la matrice \mathcal{T}_z : en faisant usage des relations

$$(\mathcal{C}_u^\dagger)^{-1} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \mathcal{C}_u^\dagger = -2\mathcal{T}_z(\theta_u) + o(A_u), \quad (5.39)$$

$$\mathcal{C}_d \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \mathcal{C}_d^{-1} = -2\mathcal{T}_z(\theta_d) + o(A_d), \quad (5.40)$$

nous pouvons déduire de la première ligne de (4.42)

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{uL} \mathfrak{C} \gamma^\mu \xi_{dL} &= \begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} \left[1 - \frac{A_u}{2} (\mathcal{C}_u^\dagger)^{-1} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \mathcal{C}_u^\dagger - \frac{A_d}{2} \mathcal{C}_d \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \mathcal{C}_d^{-1} \right] \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} [1 + A_u \mathcal{T}_z(\theta_u) + A_d \mathcal{T}_z(\theta_d)] \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Les courants chargés dans la base des états propres de saveur transformés deviennent par conséquent

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} \Omega_u [1 + A_u \mathcal{T}_z(\theta_u) + A_d \mathcal{T}_z(\theta_d)] \Omega_d^\dagger \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} \left[\Omega_u \Omega_d^\dagger \right. \\ &+ A_u \left(i(\alpha^u - \alpha^d) \mathcal{T}_z(\theta_u) + \mathcal{T}_z \left(\theta_u - \frac{\beta_y^u + \beta_y^d}{4} \right) + \frac{1}{2} \beta_x^u \mathcal{T}_y \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{i}{4} \beta_x^d Q(2(\theta_u - \theta_d)) - i \frac{\beta_z^d}{4} R(2(\theta_u - \theta_d)) + i \frac{\beta_z^u}{4} \right) \right. \\ &+ A_d \left(i(\alpha^u - \alpha^d) \mathcal{T}_z(\theta_d) + \mathcal{T}_z \left(\theta_d - \frac{\beta_y^u + \beta_y^d}{4} \right) + \frac{1}{2} \beta_x^d \mathcal{T}_y \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{i}{4} \beta_x^u Q(2(\theta_u - \theta_d)) + i \frac{\beta_z^u}{4} R(2(\theta_u - \theta_d)) - i \frac{\beta_z^d}{4} \right) \right] \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

avec $Q(\theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$ et $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Ainsi, il apparaît clairement que tous les termes du Lagrangien, c'est-à-dire les termes de masse, les courants neutres et les courants chargés, voient leur structure profondément modifiée sous des transformations unitaires générales indépendantes dans chaque secteur. Ce changement correspond à une brisure forte de la symétrie de saveur $SU(2) \times U(1)$.

En conclusion, si les grandeurs physiques demeurent invariantes sous des transformations unitaires arbitraires sur les fermions de saveur gauches, ces transformations ne constituent pas pour autant des symétries du Lagrangien. Ceci peut se comprendre comme la conséquence de la non-dégénérescence du système considéré. Nous savons que la différence de masse entre les fermions est intimement reliée au défaut d'unitarité de leur matrice de mélange. C'est seulement dans le cas particulier où ces deux grandeurs s'annulent simultanément, que les termes de masse et de courants neutres du Lagrangien, devenant l'un comme l'autre égaux à l'identité, apparaissent de manière triviale invariants sous les transformations unitaires des fermions de saveur. La levée de la dégénérescence a pour conséquence directe de briser la symétrie correspondant à l'invariance du Lagrangien sous ces transformations.

5.3.2 Rotations de saveur

Il est pertinent de considérer plus précisément les transformations unitaires particulières que sont les rotations de saveur :

$$\begin{pmatrix} d'_{fL} \\ s'_{fL} \end{pmatrix} = R_\varphi \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}, \quad R_\varphi = e^{2i\varphi T_y} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

$$\begin{pmatrix} u'_{fL} \\ c'_{fL} \end{pmatrix} = R_\vartheta \begin{pmatrix} u_{fL} \\ c_{fL} \end{pmatrix}, \quad R_\vartheta = e^{2i\vartheta T_y} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

Comme nous l'avons vu dans le cas général, les rotations de saveur ne modifient pas la base des états propres de masse, mais la matrice de mélange reliant cette dernière à la base transformée des états propres de saveur : $\hat{\mathcal{C}}_{u0} = R_\vartheta \mathcal{C}_{u0}$ et $\hat{\mathcal{C}}_{d0} = R_\varphi \mathcal{C}_{d0}$ pour les quarks de type u et d respectivement. Dans le cas particulier des rotations, nous pouvons écrire la forme explicite de ces nouvelles matrices de mélange :

$$\begin{pmatrix} d'_{fL} \\ s'_{fL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi - \theta_{dL}) & \sin(\varphi - \theta_{dL}) \\ -\sin(\varphi - \theta_{dL}) & \cos(\varphi - \theta_{dL}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{mL}^0 \\ s_{mL}^0 \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

$$\begin{pmatrix} u'_{fL} \\ c'_{fL} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta - \theta_{uL}) & \sin(\vartheta - \theta_{uL}) \\ -\sin(\vartheta - \theta_{uL}) & \cos(\vartheta - \theta_{uL}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{mL}^0 \\ c_{mL}^0 \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

Ces expressions simples montrent qu'il est possible, pour des angles φ et ϑ choisis égaux respectivement à θ_d et θ_u , de se ramener à des matrices de mélange égales à l'identité $\mathbb{1}$, c'est à dire d'aligner, indépendamment dans les deux secteurs, les états propres de saveur sur les états propres de masse classiques, non renormalisés.

Considérons d'autre part l'effet des rotations (5.43) et (5.44) sur la structure du Lagrangien. L'équation (5.30) montre que ces dernières préservent la relation entre les termes

de masse et les courants neutres, en les faisant tourner continûment l'un dans l'autre comme un doublet de $SU(2)$:

$$R_\varphi \mathcal{T}_x(\theta) R_\varphi^\dagger = \begin{pmatrix} \cos 2(\theta - \varphi) & \sin 2(\theta - \varphi) \\ \sin 2(\theta - \varphi) & -\cos 2(\theta - \varphi) \end{pmatrix} = \mathcal{T}_x(\theta - \varphi) \quad (5.47)$$

$$R_\varphi \mathcal{T}_z(\theta) R_\varphi^\dagger = \begin{pmatrix} \sin 2(\theta - \varphi) & -\cos 2(\theta - \varphi) \\ -\cos 2(\theta - \varphi) & -\sin 2(\theta - \varphi) \end{pmatrix} = \mathcal{T}_z(\theta - \varphi). \quad (5.48)$$

Les courants chargés (5.41) dans la base des états propres de saveur deviennent quant à eux

$$\begin{aligned} & \left(\bar{u}'_{fL} \quad \bar{c}'_{fL} \right) R_\vartheta [\mathbb{1} + A_u T_z(\theta_u) + A_d T_z(\theta_d)] R_\varphi^\dagger \gamma^\mu \begin{pmatrix} d'_{fL} \\ s'_{fL} \end{pmatrix} \\ &= \left(\bar{u}'_{fL} \quad \bar{c}'_{fL} \right) \left[\begin{pmatrix} \cos(\vartheta - \varphi) & \sin(\vartheta - \varphi) \\ -\sin(\vartheta - \varphi) & \cos(\vartheta - \varphi) \end{pmatrix} \right. \\ & \quad \left. + A_u T_z \left(\theta_u - \frac{\vartheta + \varphi}{2} \right) + A_d T_z \left(\theta_d - \frac{\vartheta + \varphi}{2} \right) \right] \gamma^\mu \begin{pmatrix} d'_{fL} \\ s'_{fL} \end{pmatrix}. \quad (5.49) \end{aligned}$$

Le changement du premier terme de $\mathbb{1}$ en $\begin{pmatrix} \cos(\vartheta - \varphi) & \sin(\vartheta - \varphi) \\ -\sin(\vartheta - \varphi) & \cos(\vartheta - \varphi) \end{pmatrix}$ correspond à une modification de la structure des courants chargés. Ces derniers ne se projettent plus sur la seule base constituée de $\mathbb{1}$ et \mathcal{T}_z , sauf si les angles φ et ϑ sont égaux, auquel cas l'identité $\mathbb{1}$ est bien conservée.

Ainsi, bien que des rotations de saveur indépendantes dans les deux canaux (u, c) et (d, s) ne changent pas la grandeur physique que constitue l'angle de Cabibbo, elles modifient néanmoins les différentes parties du Lagrangien. A ce titre, elles ne peuvent constituer des symétries de ce dernier.

5.3.3 Alignement des états propres de saveur et de masse

L'approche perturbative permet de montrer qu'il est toujours possible d'aligner les états propres de saveur et de masse classiques par des rotations indépendantes dans chacun des deux secteurs, tout en préservant les grandeurs physiques telles l'angle de Cabibbo dans le cas de deux générations de quarks. Les angles de mélange paramétrant les matrices de mélange dans chaque secteur n'ont donc pas de réelle signification physique, mais les seuls angles de mélange physiquement pertinents sont ceux apparaissant dans la matrice $K_u^\dagger K_d$ ($K_\nu^\dagger K_\ell$ pour les leptons) contrôlant les courants chargés.

D'autre part, seule une rotation commune des deux secteurs permet de préserver la structure des courants chargés dans la base des états propres de saveur. En faisant de la sorte, il n'est possible d'aligner les états propres de saveur sur ceux de masse que dans un seul des deux secteurs. L'angle de mélange du secteur non aligné coïncide alors avec l'angle de mélange physique qui se rencontre dans les courants chargés.

Au terme de notre travail, nous retrouvons donc le point de vue standard selon lequel il est toujours possible d'aligner masse et saveur dans l'un des deux secteurs, en le fondant sur les considérations d'invariance des courants chargés sous des rotations unitaires des fermions de saveur.

Conclusion

La ligne directrice fondamentale de la première partie de notre travail de thèse a été la non-unitarité de la matrice reliant, pour un système de fermions couplés non-dégénérés, la base des états propres de masse (dont chacun est défini à une valeur particulière de l'impulsion p) à celle des états propres d'interaction (ou états propres de saveur). Nous avons défini cette matrice comme la matrice de mélange du système fermionique étudié. Nous avons montré que les valeurs des angles de mélange des quarks comme des leptons mesurées expérimentalement réalisent une même structure particulière des courants neutres dans la base de saveur, occasionnée par la déviation de la matrice de mélange par rapport à l'unitarité ; cette structure étant définie par l'égalité des violations de l'universalité dans les courants neutres et de l'absence des courants neutres changeant la saveur. L'approche ainsi suivie se situe dans le strict cadre théorique du Modèle Standard (élargi de manière minimale pour tenir compte du caractère massif des neutrinos), sans faire appel à ce que l'on regroupe actuellement sous le terme de "nouvelle physique", comme la supersymétrie, les théories grand-unifiées (GUT) ou encore les dimensions supplémentaires. Elle offre de plus un traitement unifié des quarks et des leptons, non parce que leurs matrices de masses présentent la même texture, comme cela a pu être proposé dans la littérature (cf. par exemple [40]), mais parce que leurs angles de mélange satisfont la même condition physique au niveau des courants neutres.

Partant de la non-unitarité de la matrice de mélange établie par des arguments généraux de Théorie Quantique des Champs pour un système non-dégénéré de fermions couplés, nous avons considéré d'abord à deux dimensions un voisinage du cas unitaire standard défini par un angle de mélange unique et un petit paramètre de déviation de l'unitarité. Dans ce voisinage, les courants neutres dans la base des états propres de saveur dévient, au premier ordre dans le paramètre précédent, de la matrice identité, mais nous avons montré que la contrainte d'égalité des violations de l'universalité dans les courants neutres et de l'absence des courants neutres changeant la saveur était satisfaite de manière précise par l'angle de Cabibbo physique des quarks. Puis en suivant la même démarche dans le cas de trois familles, nous avons montré que la structure des courants neutres dans la base des états propres de saveur au voisinage de l'unitarité correspondant à cette même contrainte, était également réalisée avec une très bonne approximation par les configurations des angles de mélange observées dans la nature aussi bien pour les quarks que pour les leptons.

Nous avons étudié ensuite un exemple précis de calcul perturbatif dans le cas de deux familles, permettant de mettre en évidence le lien entre la non-unitarité de la matrice de mélange et les corrections radiatives apparaissant à l'ordre d'une boucle. Nous avons montré que la suppression de certaines transitions non-diagonales à une boucle entre états propres de masse est réalisée par l'ajout de contre-termes au Lagrangien, dont la diagonalisation subséquente entraîne l'apparition d'une base non orthonormale d'états propres de masse renormalisés. La matrice de mélange reliant cette dernière présente la

même forme que celle déterminée au chapitre 3 au voisinage de l'unitarité, le paramètre de déviation étant ici donné par le coefficient du contre-terme de Shabalin. L'invariance de jauge garantit cependant l'unitarité de la matrice de Cabibbo apparaissant dans les courants chargés exprimés dans la base de masse renormalisée.

Nous avons étudié pour finir les symétries en jeu dans notre démarche. Alors que les approches les plus couramment suivies se résument à la recherche de symétries au niveau de la matrice de masse, nous avons montré que les motifs pertinents se révélaient plutôt dans la violation de certaines propriétés liées aux courants neutres. Nous avons tout d'abord déterminé un groupe de symétrie horizontale du Lagrangien des courants neutres lié à la structure particulière de ces derniers satisfaite par les angles de mélange. Puis nous nous sommes intéressés aux liens possibles entre les courants neutres et la matrice de masse dans l'approximation d'une matrice de masse unique et constante. Nous avons enfin considéré les transformations unitaires sur les fermions de saveur, montrant que celles-ci conservaient les grandeurs physiques comme l'angle de Cabibbo, et qu'elles permettaient d'aligner dans l'un des secteurs la base de saveur sur la base de masse tout en préservant la structure des courants chargés dans la base des états propres de saveur.

Comme nous l'avons dit, ce travail ne se situe pas "au-delà du Modèle Standard" ; cependant il n'appartient pas non plus à strictement parler à ce dernier. En effet, bien qu'il soit conduit dans le cadre de celui-ci, auquel il emprunte son arrière-plan mathématique ainsi que son contenu physique, il se fonde néanmoins de manière décisive sur la non-unitarité des matrices de mélange, à la différence du Modèle Standard, qui ne comporte quand à lui par construction que des matrices de mélange unitaires. Cette propriété d'unitarité, qui se trouve légitimée *de facto* par l'accord extraordinaire des résultats expérimentaux avec les prédictions du Modèle Standard, peut ainsi être considérée, au sein de ce dernier, comme une propriété "accidentelle" d'objets étant, par ailleurs, intrinsèquement non-unitaires. D'autre part, comme nous l'avons mis en évidence, les angles de mélange des fermions mesurés expérimentalement réalisent une structure particulière des courants neutres apparaissant au voisinage de la situation standard caractérisée par l'unitarité de la matrice de mélange. Nous pouvons donc considérer que notre approche se situe au "voisinage du Modèle Standard". Bien que nous nous soyons situés à dessein hors d'une telle perspective dans le cadre de notre travail, il apparaît néanmoins que ce domaine est susceptible d'exhiber des manifestations de basse-énergie de la physique "au-delà du Modèle Standard". Le lien entre les résultats que nous avons obtenus de manière indépendante de la "nouvelle physique" (en particulier la structure particulière des courants neutres correspondant aux angles de mélange présents dans la Nature) et les manifestations de cette dernière, constitue un domaine de recherche riche à explorer dans la suite. Une autre perspective ouverte à la suite de nos travaux est la recherche d'un fondement théorique solide à la quantification observée de la tangente du double des angles de mélange $(1,2)$ des quarks et des leptons par des multiples de $\frac{1}{2}$, ainsi que le recouvrement par un calcul perturbatif explicite de la propriété maîtresse, stipulant l'égalité de l'amplitude des violations des deux propriétés physiques d'universalité des courants neutres et d'absence des courants neutres changeant la saveur causées par la non-unitarité de la matrice de mélange.

Deuxième partie

Fermions et symétries discrètes en Théorie Quantique des Champs

Nous présentons dans la seconde partie de cette thèse les premiers résultats d'un travail plus général sur les systèmes de fermions couplés en Théorie Quantique des Champs, conduit sur le modèle de celui réalisé sur les systèmes binaires de mésons neutres quasi-dégénérés par Machet *et al.* [4, 11]. Ce travail est consacré à l'étude exhaustive, en TQC, du propagateur fermionique et des contraintes apportées sur ce dernier par les symétries discrètes, dans le but de déterminer de manière rigoureuse la nature des états physiques des fermions, définis en TQC comme les états propres du propagateur à chacun de ses pôles, ainsi que l'influence des symétries discrètes sur ces derniers. Cette question se révèle être d'une pertinence particulière dans le cas des neutrinos, dont la nature exacte, de Dirac ou de Majorana, est au coeur des préoccupations actuelles.

Nous étudions dans la suite le cas d'une particule libre unique, hors de toute interaction avec le champ électrofaible. Nous consacrons une large place à des considérations préliminaires assez générales, qui font l'objet des deux premiers chapitres. Après quelques rappels sur les fondamentaux de la description des fermions en TQC que sont les spineurs de Weyl et de Dirac, nous passons en revue de manière systématique les lois de transformation de ces champs fondamentaux sous les différentes symétries discrètes (parité P , conjugaison de charge C et renversement du temps T) et leurs produits. Ce faisant nous ne prétendons pas faire oeuvre originale, mais cherchons à présenter une synthèse claire et cohérente faisant ressortir de façon explicite les difficultés et points délicats souvent peu honorés dans la littérature, et à poser ainsi des fondements solides pour la suite de notre étude. Puis, dans le chapitre suivant, nous construisons à partir des spineurs de Weyl à deux composantes le Lagrangien quadratique le plus général autorisé par la symétrie de Lorentz, et montrons que celui-ci décrit simultanément par construction un fermion et son antiparticule. Nous étudions ensuite les contraintes apportées sur ce Lagrangien par les symétries discrètes C et PCT , et montrons que celui-ci est naturellement invariant sous la symétrie PCT .

Enfin nous passons dans le dernier chapitre au formalisme propagatoriel, et nous étudions les contraintes engendrées par la symétrie \mathcal{PCT} sur les valeurs moyennes des T-produits d'opérateurs de champ. Cela nous permet de proposer une réalisation concrète pour le propagateur fermionique invariant sous \mathcal{PCT} , de forme similaire à celle du Lagrangien vu précédemment. Puis, comme pour ce dernier, nous étudions les contraintes engendrées par les symétries discrètes, en particulier la conjugaison de charge \mathcal{C} , et montrons finalement que les états propres du propagateur invariant sous \mathcal{C} sont des fermions de Majorana.

Chapitre 6

Préliminaires

6.1 Notations

Nous rappelons la forme des matrices de Pauli

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (6.1)$$

Les matrices γ sont définies par la relation d'algèbre

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (6.2)$$

où $g^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Nous travaillerons avec les matrices γ dans la représentation de Weyl (ou représentation chirale) :

$$\gamma^0 = \left(\begin{array}{c|c} & \mathbb{1} \\ \hline \mathbb{1} & \end{array} \right), \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1} & \\ \hline & -\mathbb{1} \end{array} \right), \quad (6.4)$$

et l'on note

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) = \gamma^0 \begin{pmatrix} \sigma^\mu & 0 \\ 0 & \overline{\sigma^\mu} \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

avec

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \vec{\sigma}), \quad \overline{\sigma^\mu} = (\sigma^0, -\vec{\sigma}), \quad \vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3). \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0, (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, (\gamma^{1,2,3})^\dagger = -\gamma^{1,2,3}, \\ (\gamma^0)^* &= \gamma^0, (\gamma^5)^* = \gamma^5, (\gamma^{1,3})^* = \gamma^{1,3}, (\gamma^2)^* = -\gamma^2, \\ (\gamma^0)^2 &= 1, (\gamma^5)^2 = 1, (\gamma^{1,2,3})^2 = -1, \\ \gamma^0(\gamma^0)^\dagger &= 1, \gamma^5(\gamma^5)^\dagger = 1, \gamma^{1,2,3}(\gamma^{1,2,3})^\dagger = 1. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Les matrices de Pauli vérifient les relations

$$(\sigma^0)^2 = 1 = (\sigma^i)^2, \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}. \quad (6.8)$$

ainsi que

$$\sigma_{\beta\delta}^2 \sigma_{\alpha\gamma}^2 = \delta_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma}, \quad (6.9)$$

ou encore

$$\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 = -(\sigma^i)^*, \quad \sigma^2 \sigma^0 \sigma^2 = \sigma^0 \Rightarrow \sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\sigma^0, -\vec{\sigma}^*) = \overline{\sigma^\mu}^*. \quad (6.10)$$

En ce qui concerne la notation des termes cinétiques,

$$\gamma^0 \gamma^\mu p_\mu = (\gamma^0)^2 p_\mu \begin{pmatrix} \sigma^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

6.2 Spineurs de Weyl et de Dirac

Les fermions, constituants de la matière, sont des particules de spin 1/2, dont la description nécessite deux degrés de liberté (deux composantes). Ils sont décrits par des champs appartenant à des représentations de dimension 2 du groupe $SL(2, C)$ ¹, le groupe de double recouvrement du groupe de Lorentz² L_+^\uparrow . Or le groupe $SL(2, C)$ admet deux représentations non équivalentes du type spineur : la représentation $(1/2, 0)$ réalisée par les spineurs à deux composantes avec indices non pointés ξ^α ($\alpha = 1, 2$), et la représentation $(0, 1/2)$ conjuguée de la précédente, réalisée par les spineurs à deux composantes avec indices pointés $\eta^{\dot{\alpha}}$ ($\alpha = 1, 2$). Les spineurs ξ^α et $\eta^{\dot{\alpha}}$ se transforment donc sous le groupe $SL(2, C)$ de la manière suivante :

$$\xi^{1'} = \alpha \xi^1 + \beta \xi^2 \quad \eta^{\dot{1}'} = \alpha^* \eta^{\dot{1}} + \beta^* \eta^{\dot{2}} \quad (6.12)$$

$$\xi^{2'} = \gamma \xi^1 + \delta \xi^2 \quad \eta^{\dot{2}'} = \gamma^* \eta^{\dot{1}} + \delta^* \eta^{\dot{2}} \quad (6.13)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nombres complexes vérifiant $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Ces spineurs à deux composantes sont appelés spineurs de Weyl. Les spineurs ci-dessus présentant l'indice en haut sont des spineurs contravariants. A l'aide du tenseur 2×2 totalement antisymétrique

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_{\alpha\beta}^2, \quad (6.14)$$

avec $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$ et $\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon_{\alpha\beta}$, nous pouvons définir les spineurs covariants correspondants, avec indice en bas :

$$\xi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} \xi^\beta \quad \xi_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta} \xi_\beta \quad (6.15)$$

$$\eta_{\dot{\alpha}} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta^{\dot{\beta}} \quad \eta_{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}. \quad (6.16)$$

Nous avons ainsi $\xi_1 = \xi^2$, $\xi_2 = -\xi^1$, $\eta_{\dot{1}} = \eta^{\dot{2}}$ et $\eta_{\dot{2}} = -\eta^{\dot{1}}$. Nous pouvons de plus définir une quantité invariante sous $SL(2, C)$:

$$\xi \cdot \zeta = \xi^\alpha \zeta_\alpha = \xi^1 \zeta^2 - \xi^2 \zeta^1 = -\xi_\alpha \zeta^\alpha. \quad (6.17)$$

Les champs de spineurs anti-commutent entre eux (ce sont des variables de Grassmann), d'où les relations

$$\xi \cdot \zeta = \xi^\alpha \zeta_\alpha = -\zeta_\alpha \xi^\alpha = \zeta^\alpha \xi_\alpha = \zeta \cdot \xi. \quad (6.18)$$

¹ $SL(2, C)$ est le groupe des matrices complexes 2×2 de déterminant 1.

²Par groupe de Lorentz nous entendons ici la composante connexe du groupe $SO(1, 3)$, formant le sous-groupe $SO^\uparrow(1, 3) \equiv L_+^\uparrow$ constitué des transformations de Lorentz propres orthochrones.

Comme nous le verrons plus loin, les deux types de spineurs à indices pointés et non pointés sont liés par une transformation discrète. Ils se transforment l'un dans l'autre sous l'opération de parité : $\xi^\alpha \rightarrow \eta_{\dot{\alpha}}$. Pour construire un objet se transformant en soi sous le groupe de Lorentz incluant la parité, il est nécessaire de combiner les deux types de spineurs dans un spineur à quatre composantes, ou spineur de Dirac :

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \in (1/2, 0) \oplus (0, 1/2). \quad (6.19)$$

Le spineur de Dirac ψ est une représentation réductible du groupe de Lorentz, mais il forme une représentation irréductible du groupe de Lorentz étendu par la parité. Il peut être décomposé de manière covariante en deux composantes de chiralité définie (gauche L et droite R) à l'aide de la matrice γ^5 , qui du fait de la propriété $(\gamma^5)^2 = 1$ permet de définir deux projecteurs $\frac{1 \pm \gamma^5}{2}$:

$$\psi_D = \psi_L + \psi_R \quad (6.20)$$

avec

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi_D \quad \text{et} \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi_D. \quad (6.21)$$

Les champs ψ_L et ψ_R sont les états propres de l'opérateur de chiralité γ^5 correspondant à ses deux valeurs propres ± 1 :

$$\gamma^5 \psi_L = -\psi_L \quad \text{et} \quad \gamma^5 \psi_R = \psi_R. \quad (6.22)$$

Dans la représentation de Weyl des matrices de Dirac, les deux composantes supérieures du spineur de Dirac ont la chiralité droite, et les deux composantes inférieures la chiralité gauche. En d'autres termes, les spineurs chiraux gauche et droit s'identifient aux spineurs de Weyl :

$$\psi_R = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

6.3 Equation de Dirac

L'équation de Dirac pour un fermion de masse m s'écrit sous forme covariante avec le spineur de Dirac

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \psi_D = 0 \quad (6.24)$$

où $p_\mu = i\partial_\mu$ est le quadri-vecteur énergie-impulsion. A ce vecteur à quatre composantes est associée la matrice 2×2 hermitienne définie de la façon suivante :

$$\tilde{p} = \sum_{\mu=0}^3 p_\mu \sigma^\mu = p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \quad (6.25)$$

Il est possible de considérer les éléments de la matrice \tilde{p} comme les quatre composantes indépendantes d'un spineur de second rang avec un indice pointé et un indice non pointé :

$$p_{\dot{\alpha}\beta} = (\tilde{p})_{\dot{\alpha}\beta} = (p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})_{\dot{\alpha}\beta}. \quad (6.26)$$

Remarquons que pour un tel spineur, l'ordre des indices pointés et non pointés est libre, et $p_{\dot{\alpha}\beta} = p_{\beta\dot{\alpha}}$. Cela ne signifie pas pour autant qu'il en soit de même lorsque l'on manipule l'expression explicite de la matrice correspondante, et que l'on puisse faire commuter les

indices dans le terme de droite ci-dessus. Pour garder la cohérence dans nos définitions, il est important de bien noter que $(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})$ est la matrice des $p_{\dot{\alpha}\beta}$ avec des indices inférieurs, le premier étant pointé. La matrice transposée (qui est aussi la matrice conjuguée complexe) $(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^T = (p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^*$ est alors définie comme la matrice des $p_{\alpha\dot{\beta}}$, avec le premier indice non pointé :

$$p_{\alpha\dot{\beta}} = (p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})_{\alpha\dot{\beta}}^T = (p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})_{\dot{\beta}\alpha} = p_{\dot{\beta}\alpha} \quad (6.27)$$

De la sorte, toutes nos définitions sont parfaitement cohérentes : $p_{\beta\dot{\alpha}}$ est égal à l'élément (β, α) de la matrice transposée, c'est à dire à l'élément (α, β) de la matrice normale, égal à $p_{\dot{\alpha}\beta}$.

Nous pouvons définir de la même façon le spineur $p^{\alpha\dot{\beta}}$ d'indices supérieurs. En vertu des égalités

$$p^{\dot{\alpha}\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\gamma} p_{\gamma\delta} \epsilon^{\beta\delta} = (\sigma^2)^{\dot{\alpha}\gamma} (p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})_{\gamma\delta} (\sigma^2)^{\delta\beta} = (\sigma^2 (p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \sigma^2)^{\dot{\alpha}\beta} = ((p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^*)^{\dot{\alpha}\beta}, \quad (6.28)$$

qui entraînent

$$p^{\alpha\dot{\beta}} = (p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^{\alpha\dot{\beta}}, \quad (6.29)$$

les éléments de la matrice $(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})$ correspondent aux composantes du spineur $p^{\alpha\dot{\beta}}$ d'indices supérieurs (le premier étant non pointé). La matrice transposée $(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^T = (p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^*$ est alors associée au spineur $p^{\dot{\alpha}\beta}$, avec le premier indice pointé. Nous pouvons écrire une équation identique à (6.27) :

$$p^{\dot{\alpha}\beta} = ((p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^T)^{\dot{\alpha}\beta} = (p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^{\beta\dot{\alpha}} = p^{\beta\dot{\alpha}}. \quad (6.30)$$

Les deux spineurs que nous venons de définir nous permettent d'écrire l'équation de Dirac dans la base des spineurs de Weyl, sous la forme d'un système de deux équations couplées :

$$p^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}} = m \xi^{\alpha} \quad (6.31)$$

$$p_{\dot{\beta}\alpha} \xi^{\alpha} = m \eta_{\dot{\beta}}. \quad (6.32)$$

Dans le cas d'une particule de masse nulle, ces deux équations se découplent et nous obtenons une équation indépendante pour chacun des spineurs de chiralité donnée :

$$(p_0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \xi = 0 \quad (6.33)$$

$$(p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \eta = 0 \quad (6.34)$$

Pour une particule de masse nulle, $p_0 = |\vec{p}|$, donc en notant $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$ le vecteur unité dans la direction de l'impulsion, les équations (6.33) et (6.34) deviennent simplement

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{n} \xi = \xi \quad \text{et} \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \eta = -\eta. \quad (6.35)$$

L'opérateur $\vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ mesure la projection du spin le long de l'impulsion. On appelle cette grandeur hélicité. Nous voyons donc que les spineurs de Weyl sont des états propres de l'hélicité, le spineur gauche (resp. droit) η (resp. ξ) ayant une hélicité négative (resp. positive). La chiralité peut donc se confondre avec l'hélicité pour une particule de masse nulle, mais seulement dans ce cas. Bien que la confusion soit fréquente dans la littérature, chiralité et hélicité sont deux choses fort différentes. Seulement dans le cas particulier de masse nulle, les spineurs de chiralité définie sont états propres de l'hélicité, et possèdent de ce fait également une hélicité définie.

Chapitre 7

Symétries discrètes

Nous étudions dans ce chapitre les symétries discrètes de parité P , conjugaison de charge C , et renversement du temps T , et clarifions leurs actions respectives sur les spineurs de Weyl, considérés successivement comme fonctions classiques grassmanniennes (approche fonctionnelle), puis comme opérateurs (approche opératorielle). Pour finir, nous abordons brièvement les cas particuliers constitués par les fermions de masse nulle et ceux de Majorana, dont les définitions font intervenir les symétries C et PC .

7.1 Symétries

Une opération de symétrie est une transformation $\Psi \rightarrow \Psi'$ sur les états d'un système physique (représentés par des rayons dans l'espace de Hilbert) qui préserve les transitions de probabilité :

$$|\langle \psi' | \chi' \rangle|^2 = |\langle \psi | \chi \rangle|^2. \quad (7.1)$$

Un théorème fondamental prouvé par Wigner (dont on trouvera une démonstration complète dans [1]) énonce que toute transformation de symétrie peut être représentée sur l'espace de Hilbert par un opérateur qui est ou bien unitaire et linéaire, ou bien antiunitaire et antilinéaire.

Dans le premier cas, $\psi' = U\psi$ avec

$$\langle U\psi | U\chi \rangle = \langle \psi | \chi \rangle \quad (7.2)$$

$$U(\lambda\psi + \mu\chi) = \lambda U\psi + \mu U\chi. \quad (7.3)$$

Dans le second cas, $\psi' = A\psi$ avec

$$\langle A\psi | A\chi \rangle = \langle \chi | \psi \rangle = \langle \psi | \chi \rangle^* \quad (7.4)$$

$$A(\lambda\psi + \mu\chi) = \lambda^* A\psi + \mu^* A\chi. \quad (7.5)$$

Rappelons ici brièvement la démonstration du fait que tout opérateur antiunitaire (resp. unitaire) est antilinéaire (resp. linéaire) : Si A est un opérateur antiunitaire et λ un nombre complexe,

$$\langle A\psi | A\lambda\chi \rangle = \langle \lambda\chi | \psi \rangle = \lambda^* \langle \chi | \psi \rangle = \lambda^* \langle A\psi | A\chi \rangle \quad (7.6)$$

et de même dans le cas unitaire $\langle U\psi | U\lambda\chi \rangle = \lambda \langle U\psi | U\chi \rangle$. Bien qu'élémentaire, cette proposition permet néanmoins de ne pas se laisser induire en erreur dans des cas comme celui de la conjugaison de charge, où la propriété d'(anti-)unitarité d'un opérateur semble en contradiction avec la forme que prend ce dernier en agissant sur les champs fermioniques.

L'adjoint d'un opérateur linéaire est défini par

$$\langle \psi | U^\dagger | \chi \rangle \equiv \langle U \psi | \chi \rangle. \quad (7.7)$$

Pour un opérateur antilinéaire, la condition ci-dessus ne peut plus être satisfaite car le membre de gauche serait antilinéaire en χ et ψ alors que le membre de droite serait linéaire dans les deux états. L'adjoint est donc défini par l'égalité [1]

$$\langle \psi | A^\dagger | \chi \rangle \equiv \langle A \psi | \chi \rangle^* = \langle \chi | A \psi \rangle. \quad (7.8)$$

Avec ces définitions, les conditions d'unitarité et d'antiunitarité prennent toutes les deux la même forme :

$$UU^\dagger = 1 = U^\dagger U, \quad AA^\dagger = 1 = A^\dagger A, \quad (7.9)$$

c'est à dire

$$U^\dagger = U^{-1}, \quad A^\dagger = A^{-1}. \quad (7.10)$$

Le transformé d'un opérateur \mathcal{O} agissant sur les états de l'espace de Hilbert est défini par la relation

$$\langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle = \langle \psi' | \mathcal{O}' | \psi' \rangle. \quad (7.11)$$

- Pour une transformation unitaire,

$$\langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle = \langle \psi' | U \mathcal{O} U^{-1} | \psi' \rangle, \quad (7.12)$$

d'où la relation

$$\mathcal{O}' = U \mathcal{O} U^{-1}. \quad (7.13)$$

- Dans le cas d'une transformation antiunitaire,

$$\langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle = \langle A^{-1} \psi | \mathcal{O} | A^{-1} \psi \rangle = \langle \psi | A \mathcal{O} A^{-1} | \psi \rangle^* = \langle \psi | (A \mathcal{O} A^{-1})^\dagger | \psi \rangle, \quad (7.14)$$

d'où découle

$$\mathcal{O}' = (A \mathcal{O} A^{-1})^\dagger. \quad (7.15)$$

Ainsi quel que soit le cas, que la symétrie soit représentée par un opérateur unitaire ou antiunitaire, l'application associant à chaque opérateur l'opérateur transformé est linéaire (voir [41] pour plus de précisions).

Considérons pour finir le produit $\langle \psi | \mathcal{O}^\dagger | \psi \rangle$. Par définition, pour toute transformation (unitaire ou antiunitaire), il est égal à $\langle \psi' | (\mathcal{O}^\dagger)' | \psi' \rangle$. D'autre part, nous pouvons écrire

$$\langle \psi | \mathcal{O}^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle^* = \langle \psi' | \mathcal{O}' | \psi' \rangle^* = \langle \psi' | (\mathcal{O}')^\dagger | \psi' \rangle, \quad (7.16)$$

d'où nous déduisons

$$(\mathcal{O}^\dagger)' = (\mathcal{O}')^\dagger. \quad (7.17)$$

Cette relation s'applique en particulier à un opérateur de champ Ψ , et nous admettons de ce fait par souci de cohérence sa validité au niveau des champs classiques ψ :

$$(\Psi^\dagger)' = (\Psi')^\dagger, \quad (\psi^*)' = (\psi')^*. \quad (7.18)$$

Ces deux propriétés nous seront utiles pour déduire dans la suite les lois de transformation des conjugués complexes des champs (fonctions classiques et opérateurs).

7.2 Parité

La transformation de parité consiste dans l'inversion d'espace

$$(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{P} (x^0, -\vec{x}) \quad (7.19)$$

Elle renverse également le sens de l'impulsion, mais non le spin, et inverse par conséquent le signe de l'hélicité.

7.2.1 Fonctions grassmanniennes

Avec la convention $P^2 = -1$ [42], les champs de Weyl classiques se transforment sous l'opération de Parité de la façon suivante :

$$\xi^\alpha(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} i\eta_{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t) \quad \eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} i\xi^\alpha(-\vec{x}, t) \quad (7.20)$$

$$\xi_\alpha(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} -i\eta^{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t) \quad \eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} -i\xi_\alpha(-\vec{x}, t). \quad (7.21)$$

Les champs transformés des champs conjugués complexes sont définis comme les champs conjugués complexes des champs transformés :

$$P.(\xi^\alpha)^* = (P.\xi^\alpha)^* \quad (7.22)$$

d'où

$$(\xi^\alpha)^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} -i(\eta_{\dot{\alpha}})^*(-\vec{x}, t) \quad (\eta_{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} -i(\xi^\alpha)^*(-\vec{x}, t) \quad (7.23)$$

$$(\xi_\alpha)^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} i(\eta^{\dot{\alpha}})^*(-\vec{x}, t) \quad (\eta^{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} i(\xi_\alpha)^*(-\vec{x}, t). \quad (7.24)$$

L'action de la conjugaison de charge sur un spineur de Dirac s'écrit de la façon suivante :

$$P.\psi_D = i\gamma^0\psi_D. \quad (7.25)$$

7.2.2 Opérateurs

L'action de la parité sur les opérateurs de champ s'écrit, en utilisant la correspondance (7.13) pour les opérateurs unitaires :

$$\mathcal{P}\Psi(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = i\gamma^0\Psi(-\vec{x}, t), \quad (7.26)$$

c'est-à-dire, en termes des champs de Weyl :

$$\mathcal{P}\xi^\alpha(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = i\eta_{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t) \quad \mathcal{P}\eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = i\xi^\alpha(-\vec{x}, t) \quad (7.27)$$

$$\mathcal{P}\xi_\alpha(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = -i\eta^{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t) \quad \mathcal{P}\eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = -i\xi_\alpha(-\vec{x}, t) \quad (7.28)$$

$$\mathcal{P}(\xi^\alpha)^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = -i(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(-\vec{x}, t) \quad \mathcal{P}(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = -i(\xi^\alpha)^\dagger(-\vec{x}, t) \quad (7.29)$$

$$\mathcal{P}(\xi_\alpha)^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = i(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(-\vec{x}, t) \quad \mathcal{P}(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{P}^{-1} = i(\xi_\alpha)^\dagger(-\vec{x}, t). \quad (7.30)$$

7.3 Conjugaison de charge

L'opération de conjugaison de charge associe à chaque particule son antiparticule, de charge opposée¹. Elle n'agit pas sur les variables spatio-temporelles (en particulier l'impulsion) ni sur le spin et conserve de ce fait l'hélicité.

¹Le terme de charge ici a un sens général, qui recouvre non seulement la charge électrique, mais également la charge baryonique, leptonique, etc. selon le contexte physique.

7.3.1 Fonctions grassmanniennes

La conjugaison de charge est une transformation unitaire et linéaire dont l'action sur un spineur de Dirac peut s'écrire de la façon suivante :

$$C.\psi_D = U_C \overline{\psi_D}^T, \quad (7.31)$$

où U_C est un opérateur unitaire :

$$U_C = i\gamma^2\gamma^0, \quad (U_C)^\dagger U_C = 1 = (U_C)^2. \quad (7.32)$$

En notant que $\overline{\psi_D}^T = \gamma^0\psi_D^*$, nous pouvons écrire de manière équivalente l'action de l'opérateur C sous la forme

$$C.\psi_D = i\gamma^2\psi_D^*. \quad (7.33)$$

Nous en déduisons la transformation de conjugaison de charge pour les spineurs de Weyl :

$$C. \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = i\gamma^2 \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}^* = i \begin{pmatrix} -\sigma_{\dot{\alpha}\beta}^2 \eta_{\dot{\beta}}^* \\ \sigma_{\alpha\beta}^2 \xi^{\beta*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}^* \\ g_{\alpha\beta} \xi^{\beta*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^{\dot{\alpha}*} \\ \xi_\beta^* \end{pmatrix}, \quad (7.34)$$

d'où

$$\xi^\alpha(\vec{x}, t) \xrightarrow{C} \eta^{\dot{\alpha}*}(\vec{x}, t) \quad \eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) \xrightarrow{C} \xi_\alpha^*(\vec{x}, t) \quad (7.35)$$

$$\xi_\alpha(\vec{x}, t) \xrightarrow{C} \eta_{\dot{\alpha}}^*(\vec{x}, t) \quad \eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) \xrightarrow{C} \xi^{\alpha*}(\vec{x}, t) \quad (7.36)$$

ou de manière équivalente

$$(\xi^\alpha)^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{C} \eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) \quad (\eta_{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{C} \xi_\alpha(\vec{x}, t) \quad (7.37)$$

$$(\xi_\alpha)^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{C} \eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) \quad (\eta^{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{C} \xi^{\alpha}(\vec{x}, t). \quad (7.38)$$

Le calcul de C^2 donne :

$$C^2.\psi_D = C.(C.\psi_D) = C.(i\gamma^2\psi_D^*) = i\gamma^2(C.\psi_D^*) = i\gamma^2(C.\psi_D)^* = i\gamma^2(i\gamma^2)^*\psi_D = \psi_D, \quad (7.39)$$

d'où $C^2 = 1$. Notons qu'il est possible de retrouver ce résultat en utilisant les lois de transformation (7.35) à (7.38) exprimant directement l'action de l'opérateur C sur les spineurs de Weyl à deux composantes. Ainsi, par exemple, $C^2.\xi^\alpha = C.(\eta^{\dot{\alpha}*}) = (C.\eta^{\dot{\alpha}})^* = \xi^\alpha$.

7.3.2 Opérateurs

Le passage aux opérateurs de champs s'effectue naturellement selon la règle de correspondance (7.13) pour les opérateurs unitaires :

$$\mathcal{C}\Psi(\vec{x}, t)\mathcal{C}^{-1} = i\gamma^2\Psi^\dagger(\vec{x}, t), \quad (7.40)$$

c'est-à-dire, en termes des champs de Weyl :

$$\mathcal{C}\xi^\alpha(\vec{x}, t)\mathcal{C}^{-1} = (\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, t) \quad \mathcal{C}\eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t)\mathcal{C}^{-1} = (\xi_\alpha)^\dagger(\vec{x}, t) \quad (7.41)$$

$$\mathcal{C}\xi_\alpha(\vec{x}, t)\mathcal{C}^{-1} = (\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, t) \quad \mathcal{C}\eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t)\mathcal{C}^{-1} = (\xi^\alpha)^\dagger(\vec{x}, t) \quad (7.42)$$

$$\mathcal{C}(\xi^\alpha)^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{C}^{-1} = (\eta^{\dot{\alpha}})(\vec{x}, t) \quad \mathcal{C}(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{C}^{-1} = (\xi_\alpha)(\vec{x}, t) \quad (7.43)$$

$$\mathcal{C}(\xi_\alpha)^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{C}^{-1} = (\eta_{\dot{\alpha}})(\vec{x}, t) \quad \mathcal{C}(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{C}^{-1} = (\xi^\alpha)(\vec{x}, t). \quad (7.44)$$

Bien que la conjugaison de charge ait une forme antilinéaire, du fait que son action sur les fonctions d'ondes (7.33) comme sur les opérateurs de champ (7.40) comporte une conjugaison complexe, il s'agit bien d'une opération unitaire et linéaire (cf. [2], p. 70). La raison profonde en est la cohérence avec le théorème *PCT*, qui affirme l'existence, dans toute théorie quantique des champs locale, d'un opérateur antiunitaire unique $\Theta = PCT$ (voir [44] et [45]). Si C était un opérateur antilinéaire (et de ce fait antiunitaire²), le produit *PCT* des trois transformations discrètes serait alors unitaire (étant donné que l'opération de renversement du temps T est, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, antiunitaire), ce qui constituerait une contradiction avec le théorème *PCT*.

Ainsi la forme que prend l'opération de conjugaison de charge en agissant sur un spineur (fonction grassmannienne ou opérateur de champ) ne constitue en aucun cas une définition complète de cette transformation ; on doit lui adjoindre de manière indépendante la propriété d'unitarité (et donc de linéarité), qui ne saurait en être déduite directement. Cette considération est vraie de manière générale pour toute transformation, mais plus particulièrement pour C , T et *PCT*, dans le cas desquelles le lien entre la forme de la transformation sur un spineur et sa propriété d'(anti)unitarité peut sembler contre-intuitif.

7.3.3 Transformation *PC*

Il est utile d'écrire également les lois de transformation des spineurs sous le produit *CP*, car ce dernier intervient en particulier pour les particules de masse nulle. Les spineurs de Weyl se transforment sous *CP* de la façon suivante :

$$\xi^\alpha(\vec{x}, t) \xrightarrow{PC} i\xi_\alpha^*(-\vec{x}, t) \quad \eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) \xrightarrow{PC} i\eta^{\dot{\alpha}*}(-\vec{x}, t) \quad (7.45)$$

$$\xi_\alpha(\vec{x}, t) \xrightarrow{PC} -i\xi^{\alpha*}(-\vec{x}, t) \quad \eta^{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t) \xrightarrow{PC} -i\eta_{\dot{\alpha}}^*(-\vec{x}, t) \quad (7.46)$$

ainsi que

$$(\xi^\alpha)^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{PC} -i\xi_\alpha(-\vec{x}, t) \quad (\eta_{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{PC} -i\eta^{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t) \quad (7.47)$$

$$(\xi_\alpha)^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{PC} i\xi^\alpha(-\vec{x}, t) \quad (\eta^{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{PC} i\eta_{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t). \quad (7.48)$$

On peut vérifier que $PC = CP$, et que $(PC)^2 = -1$.

7.4 Renversement du temps

Cette transformation consiste à inverser le signe du temps :

$$(x^0, \vec{x}) \xrightarrow{T} (-x^0, \vec{x}) \quad (7.49)$$

Elle renverse également le sens de l'impulsion ainsi que l'orientation du spin, et laisse de ce fait l'hélicité inchangée.

7.4.1 Fonctions grassmanniennes

Du fait qu'elle échange les états initiaux et finaux du système auquel elle s'applique, l'opération de renversement du temps est décrite par un opérateur antiunitaire (et donc antilinéaire) :

$$\langle T\varphi | T\psi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle, \quad T^\dagger T = TT^\dagger = 1. \quad (7.50)$$

²En supposant bien sûr que C soit bien une transformation de symétrie au sens de Wigner.

Son action sur un spineur de Dirac peut s'écrire comme

$$T.\psi_D(\vec{x}, t) = U_T \overline{\psi_D}^T(\vec{x}, -t), \quad (7.51)$$

où U_T est un opérateur unitaire :

$$U_T = \gamma^1 \gamma^3 \gamma^0. \quad (7.52)$$

L'expression (7.51) peut se récrire sous la forme

$$T.\psi_D = \gamma^1 \gamma^3 \psi_D^*. \quad (7.53)$$

Nous pouvons en déduire l'action du renversement du temps sur les spineurs de Weyl :

$$\xi^\alpha(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} \xi_\alpha^*(\vec{x}, -t) \quad \eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} -\eta^{\dot{\alpha}*}(\vec{x}, -t) \quad (7.54)$$

$$\xi_\alpha(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} -\xi^{\alpha*}(\vec{x}, -t) \quad \eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} \eta_{\dot{\alpha}}^*(\vec{x}, -t) \quad (7.55)$$

et sur leurs conjugués complexes

$$(\xi^\alpha)^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} \xi_\alpha(\vec{x}, -t) \quad (\eta_{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} -\eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, -t) \quad (7.56)$$

$$(\xi_\alpha)^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} -\xi^\alpha(\vec{x}, -t) \quad (\eta^{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} \eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, -t). \quad (7.57)$$

L'action du renversement du temps sur les fonctions grassmanniennes comporte, à l'instar de la conjugaison de charge, une conjugaison complexe ; mais à la différence de cette dernière et de manière plus intuitive, cette transformation est cette fois bien antiunitaire et antilinéaire. Le calcul de T^2 donne ainsi

$$T^2.\psi = T.(\gamma^1 \gamma^3 \psi_D^*) = \gamma^1 \gamma^3 (T.\psi_D^*) = \gamma^1 \gamma^3 (T.\psi_D)^* = \gamma^1 \gamma^3 (\gamma^1 \gamma^3) \psi_D = -\psi_D, \quad (7.58)$$

d'où $T^2 = -1$. On peut montrer de la même manière que $CT = TC$.

7.4.2 Opérateurs

L'action du renversement du temps sur les opérateurs de champ s'écrit, en utilisant la correspondance (7.15) pour les opérateurs antiunitaires :

$$\mathcal{T}\Psi(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = \gamma^1 \gamma^3 \Psi(\vec{x}, -t), \quad (7.59)$$

c'est-à-dire, en termes des champs de Weyl :

$$\mathcal{T}\xi^\alpha(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = \xi_\alpha(\vec{x}, -t) \quad \mathcal{T}\eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = -\eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, -t) \quad (7.60)$$

$$\mathcal{T}\xi_\alpha(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = -\xi^\alpha(\vec{x}, -t) \quad \mathcal{T}\eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = \eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, -t) \quad (7.61)$$

$$\mathcal{T}(\xi^\alpha)^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = (\xi_\alpha)^\dagger(\vec{x}, -t) \quad \mathcal{T}(\xi_\alpha)^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = -(\xi^\alpha)^\dagger(\vec{x}, -t) \quad (7.62)$$

$$\mathcal{T}(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = -(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, -t) \quad \mathcal{T}(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, t)\mathcal{T}^{-1} = (\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, -t). \quad (7.63)$$

Ici encore, \mathcal{T} est bien antiunitaire et antilinéaire, bien que son action sur les opérateurs de champs ne fasse pas intervenir de conjugaison complexe.

7.5 Transformation PCT

A la différence des trois symétries discrètes P , C et T vues précédemment, la symétrie antiunitaire PCT est une symétrie fondamentale de toute théorie quantique des champs locale, comme cela est établi par le théorème du même nom (voir [44] et [45] ainsi que les références internes). Elle se trouve en particulier intimement liée à l'invariance de Lorentz. Dans la suite cependant, nous nous bornerons à utiliser la définition effective de PCT comme produit des symétries discrètes sus-mentionnées afin de calculer son action sur les champs fermioniques.

7.5.1 Fonctions grassmanniennes

En utilisant la linéarité de P , nous pouvons montrer que l'opérateur PCT agit de la façon suivante sur un spineur de Dirac :

$$PCT.\psi_D = PC(\gamma^1\gamma^3\psi_D^*) = \gamma^1\gamma^3P(-i\gamma^{2*}\psi_D) = i\gamma^1\gamma^3\gamma^2(i\gamma^0)\psi_D = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi_D, \quad (7.64)$$

c'est à dire

$$PCT.\psi_D(x) = i\gamma^5\psi_D(-x). \quad (7.65)$$

Son action sur un spineur de Weyl s'écrit quand à elle

$$\xi^\alpha(x) \xrightarrow{PCT} i\xi^\alpha(-x) \quad \eta_{\dot{\alpha}}(x) \xrightarrow{PCT} -i\eta_{\dot{\alpha}}(-x) \quad (7.66)$$

$$\xi_\alpha(x) \xrightarrow{PCT} i\xi_\alpha(-x) \quad \eta^{\dot{\alpha}}(x) \xrightarrow{PCT} -i\eta^{\dot{\alpha}}(-x). \quad (7.67)$$

Pour les champs complexes conjugués, nous obtenons de même

$$PCT.\psi_D^*(x) = -i\gamma^5\psi_D^*(-x) \quad (7.68)$$

et

$$(\xi^\alpha)^*(x) \xrightarrow{PCT} -i(\xi^\alpha)^*(-x) \quad (\eta_{\dot{\alpha}})^*(x) \xrightarrow{PCT} i(\eta_{\dot{\alpha}})^*(-x) \quad (7.69)$$

$$(\xi_\alpha)^*(x) \xrightarrow{PCT} -i(\xi_\alpha)^*(-x) \quad (\eta^{\dot{\alpha}})^*(x) \xrightarrow{PCT} i(\eta^{\dot{\alpha}})^*(-x). \quad (7.70)$$

P et C étant unitaires et T antiunitaire, le produit PCT est antiunitaire. Bien que nous la retrouvions ici par voie extrinsèque, cette caractéristique est une propriété intrinsèque fondamentale de la symétrie qui découle directement du théorème PCT . D'autre part, comme C et T comportent tous deux une conjugaison complexe, celle-ci disparaît du produit PCT . Ainsi, l'action de PCT sur les fonctions d'ondes de Dirac ne comporte pas de conjugaison complexe, en dépit du fait que cet opérateur soit antiunitaire (et donc antilinéaire).

Le calcul de $(PCT)^2$ s'effectue en particulier de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (PCT)^2 \cdot \psi &= (PCT) \cdot (PCT \cdot \psi) \\ &= (PCT)(-\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi) \\ &= (-\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^*(PCT) \cdot \psi \\ &= -\gamma^0\gamma^1(\gamma^2)^*\gamma^3(PCT) \cdot \psi \\ &= -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi \\ &= \psi, \end{aligned}$$

d'où $(PCT)^2 = 1$ (ce que l'on peut retrouver directement à partir des spineurs de Weyl).

7.5.2 Opérateurs

L'action de $\Theta \equiv \mathcal{PCT}$ sur les opérateurs de champ est définie au moyen de la correspondance (7.15) pour les opérateurs antiunitaires :

$$\Theta\Psi(x)\Theta^{-1} = -i\gamma^5\Psi^\dagger(-x), \quad (7.71)$$

c'est-à-dire, en termes des champs de Weyl :

$$\Theta\xi^\alpha(x)\Theta^{-1} = -i(\xi^\alpha)^\dagger(-x) \quad \Theta\eta_{\dot{\alpha}}(x)\Theta^{-1} = i(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(-x) \quad (7.72)$$

$$\Theta\xi_\alpha(x)\Theta^{-1} = -i(\xi_\alpha)^\dagger(-x) \quad \Theta\eta^{\dot{\alpha}}(x)\Theta^{-1} = i(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(-x) \quad (7.73)$$

$$\Theta(\xi^\alpha)^\dagger(x)\Theta^{-1} = i\xi^\alpha(-x) \quad \Theta(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(x)\Theta^{-1} = -i\eta_{\dot{\alpha}}(-x) \quad (7.74)$$

$$\Theta(\xi_\alpha)^\dagger(x)\Theta^{-1} = i\xi_\alpha(-x) \quad \Theta(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(x)\Theta^{-1} = -i\eta^{\dot{\alpha}}(-x). \quad (7.75)$$

7.6 Fermions de masse nulle

Une particule de masse nulle ne possède que deux degrés de liberté physiques, et sa description ne nécessite donc qu'un seul spineur de Weyl à deux composantes, ξ^α ou $\eta_{\dot{\alpha}}$, de chiralité fixée, droite ou gauche. De plus, comme nous l'avons vu dans la partie (6.2), dans ce cas particulier les spineurs de Weyl sont également états propres de l'hélicité, et possèdent donc une hélicité bien définie, ± 1 . De ce fait, les particules de masse nulle ont une hélicité intrinsèque déterminée. On peut comprendre cela d'une autre manière : pour une particule de masse nulle, il n'est pas possible de modifier la projection du spin le long de l'impulsion par un changement de référentiel effectué à l'aide d'un boost de manière à inverser la direction de l'impulsion. Du point de vue expérimental, cela apparaît clairement pour le neutrino. Bien que l'on sache aujourd'hui que sa masse n'est pas nulle, celle-ci est néanmoins suffisamment petite pour que l'on mesure que le neutrino a une hélicité gauche (-1), et l'antineutrino une hélicité droite ($+1$).

La conséquence de ceci est que l'antiparticule d'un fermion de masse nulle ne correspond pas au conjugué de charge du spineur de Weyl le décrivant, mais à son transformé par CP . En effet, le conjugué de charge d'un fermion de Weyl appartenant à une représentation définie du groupe $SL(2, C)$, s'il se transforme de la même manière sous le groupe de Lorentz, est néanmoins défini par un fermion appartenant à la représentation conjuguée : ainsi par exemple, $(\xi^\alpha)^c = (\eta^{\dot{\alpha}})^*$ (la conjugaison complexe assurant que $(\eta^{\dot{\alpha}})^*$ appartient à la même représentation $(1/2, 0)$ que ξ^α). Par conséquent il n'est pas possible de définir l'antiparticule d'un fermion décrit par un spineur de Weyl unique, par les lois de transformation (7.35) à (7.38) des fermions de Weyl sous la conjugaison de charge C .

Le cas des neutrinos déjà évoqué permet d'illustrer et de mieux comprendre cette impossibilité spécifique aux particules de masse nulle. La conjugaison de charge ne modifie ni l'impulsion ni le spin des particules, et de ce fait ne change pas non plus l'hélicité. Or un antineutrino ne peut avoir qu'une hélicité droite, opposée à celle du neutrino d'hélicité gauche, et ne peut donc pas être défini comme le transformé par C du spineur à deux composantes décrivant le neutrino. En revanche le transformé par CP convient tout à fait : puisque l'opération de parité inverse le sens de l'impulsion et donc le signe de l'hélicité, le conjugué par CP du neutrino gauche est un champ droit que l'on peut définir comme celui de l'antineutrino.

Ce résultat s'obtient naturellement en raisonnant à partir de la définition du conjugué de charge d'une particule massive décrite par un spineur de Dirac. Nous pouvons écrire

formellement une particule de masse nulle comme un spineur de Dirac dont deux des composantes sont nulles. Par exemple pour un spineur gauche

$$\psi_D = \psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (7.76)$$

Le conjugué de charge de ce spineur de Dirac est défini en (7.33) par $C.\psi_D = i\gamma^2\psi_D^*$, ce qui donne

$$C.\begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = i\gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}^* = i \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (\eta_{\dot{\alpha}})^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\sigma_2\eta_{\dot{\alpha}}^* \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.77)$$

Nous pouvons réécrire le produit $-i\sigma_2(\eta_{\dot{\alpha}})^*$ comme $\eta^{\dot{\alpha}*}$, c'est à dire $-i(\eta_{\dot{\alpha}})^{CP}$. Le conjugué de charge est donc bien un spineur droit, défini qui plus est comme le conjugué CP du spineur de Weyl décrivant la particule.

Ainsi, pour une particule de masse nulle, le conjugué de charge est défini comme le conjugué CP du spineur à deux composantes correspondant. De cette sorte, l'antiparticule d'un fermion gauche est un fermion droit³, et réciproquement. Notons cependant que cette particularité est strictement réservée aux particules de masse nulle, et ne saurait en aucun cas être étendue aux fermions massifs (en particulier aux neutrinos, lorsque ceux-ci sont considérés hors modèle standard comme massifs). En effet, la définition, spécifique aux particules de masse nulle, de l'antiparticule comme le conjugué CP de la particule correspondante est obtenue précisément à partir de la définition, commune aux fermions massifs, de l'antifermion comme conjugué de charge C du fermion initial.

7.7 Fermions de Majorana

Un fermion de Majorana est défini comme un état propre de l'opérateur C . Comme $C^2 = 1$, les deux valeurs propres possibles sont 1 et -1 . Un spineur de Majorana est donc égal (au signe près) à son conjugué de charge :

$$\psi_M = \pm\psi_M^c. \quad (7.78)$$

Cela implique que les spineurs de Weyl doivent satisfaire l'une des deux conditions équivalentes :

$$\xi^\alpha = \pm\eta^{\dot{\alpha}*} \quad (7.79)$$

$$\eta_{\dot{\alpha}} = \pm\xi_\alpha^* \quad (7.80)$$

Un spineur de Majorana se construit donc à partir d'un seul spineur de Weyl, et possède donc moitié moins de degrés de liberté qu'un spineur de Dirac :

$$\psi_M^\pm = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \pm\xi_\alpha^* \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \chi_M^\pm = \begin{pmatrix} \pm(\eta^{\dot{\alpha}})^* \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (7.81)$$

Les deux formes ci-dessus sont identiques par les relations (7.79) et (7.80). Elles sont de plus reliées par conjugaison de charge :

$$\psi_M^+ \xleftrightarrow{C} \chi_M^+, \quad \psi_M^- \xleftrightarrow{C} -\chi_M^- \quad (7.82)$$

³"Gauche" et "droit" désignent ici aussi bien la chiralité que l'hélicité, les deux étant confondues pour un fermion de masse nulle.

Nous pouvons remarquer que la forme des spineurs ψ_M^\pm et χ_M^\pm fait intervenir un spineur de Weyl avec son conjugué par CP :

$$\psi_M^\pm = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \pm(-i)(\xi^\alpha)^{CP} \end{pmatrix}, \quad \chi_M^\pm = \begin{pmatrix} \pm(-i)(\eta_\beta)^{CP} \\ \eta_\beta \end{pmatrix}. \quad (7.83)$$

Les fermions de Majorana ont ainsi une parité CP égale à $\pm i$, c'est-à-dire :

$$CP.\psi_M^\pm = \pm i\gamma^0\psi_M^\pm, \quad CP.\chi_M^\pm = \pm i\gamma^0\chi_M^\pm. \quad (7.84)$$

Nous pouvons écrire des termes de masse de Majorana des deux façons suivantes, toutes deux invariantes sous $SL(2, C)$:

$$\overline{\psi_M}\psi_M = \psi_M^\dagger\gamma^0\psi_M = \pm((\xi^\alpha)^*(\xi_\alpha)^* + \xi_\alpha\xi^\alpha) = \pm((\xi^\alpha)^*(\xi_\alpha)^* - \xi^\alpha\xi_\alpha) \quad (7.85)$$

$$\overline{\psi_M}\gamma^5\psi_M = \psi_M^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi_M = \pm(-(\xi^\alpha)^*(\xi_\alpha)^* + \xi_\alpha\xi^\alpha) = \mp((\xi^\alpha)^*(\xi_\alpha)^* + \xi^\alpha\xi_\alpha). \quad (7.86)$$

Nous pouvons écrire de même deux types de termes cinétiques de Majorana :

$$\begin{aligned} \overline{\psi_M}\gamma^\mu\overleftrightarrow{p}_\mu\psi_M &= \psi_M^\dagger \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p}\cdot\vec{\sigma})} & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})} \end{pmatrix} \psi_M \\ &= (\xi^\alpha)^*\overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p}\cdot\vec{\sigma})}\xi^\beta + (\pm(\xi_\alpha)^*)^*\overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})}(\pm\xi_\beta^*) \\ &= (\xi^\alpha)^*\overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p}\cdot\vec{\sigma})}\xi^\beta + \xi_\alpha\overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})}\xi_\beta^*, \end{aligned} \quad (7.87)$$

$$\begin{aligned} \overline{\psi_M}\gamma^\mu\gamma^5\overleftrightarrow{p}_\mu\psi_M &= \psi_M^\dagger \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p}\cdot\vec{\sigma})} & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})} \end{pmatrix} \gamma^5\psi_M \\ &= (\xi^\alpha)^*\overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p}\cdot\vec{\sigma})}\xi^\beta - (\pm(\xi_\alpha)^*)^*\overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})}(\pm\xi_\beta^*) \\ &= (\xi^\alpha)^*\overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p}\cdot\vec{\sigma})}\xi^\beta - \xi_\alpha\overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p}\cdot\vec{\sigma})}\xi_\beta^* \end{aligned} \quad (7.88)$$

Tout fermion de Dirac peut s'écrire comme la somme de deux fermions de Majorana, de valeurs propres respectives $C = -1$ et $C = +1$:

$$\begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \xi^\alpha - (\eta^\alpha)^* \\ -\xi_\beta^* + \eta_\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi^\alpha + (\eta^\alpha)^* \\ \xi_\beta^* + \eta_\beta \end{pmatrix} \right]. \quad (7.89)$$

Réciproquement, tout fermion de Majorana peut s'écrire, d'une infinité de manières, comme la somme d'un fermion de Dirac et de son conjugué de charge :

$$\begin{pmatrix} \theta^\alpha \\ \theta_\beta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^\alpha + (\eta^\alpha)^* \\ \eta_\beta + \xi_\beta^* \end{pmatrix}. \quad (7.90)$$

où les spineurs de Weyl ne sont pas fixés, mais seulement leur combinaison $\xi^\alpha + (\eta^\alpha)^*$.

Enfin, tout fermion de Majorana peut également s'écrire comme la somme d'un fermion gauche (ou droit) et de son conjugué de charge :

$$\psi_M^\pm = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \pm\xi_\alpha^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pm\xi_\alpha^* \end{pmatrix} = \psi_R \pm i\gamma^2\psi_R^* = \psi_R \pm (\psi_R)^c. \quad (7.91)$$

ou

$$\psi_M^\pm = \begin{pmatrix} \pm(\eta^\alpha)^* \\ \eta_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta_\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm(\eta^\alpha)^* \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_L \pm i\gamma^2\psi_L^* = \psi_L \pm (\psi_L)^c. \quad (7.92)$$

Chapitre 8

Lagrangien classique pour une particule

Intéressons-nous à présent aux contraintes apportées par les symétries discrètes sur le Lagrangien fermionique. Le Lagrangien considéré ici est le Lagrangien classique utilisé dans le cadre de l'approche fonctionnelle de la Théorie Quantique des Champs, dans laquelle les champs fermioniques sont des fonctions classiques anticommutantes écrites en fonction de variables de Grassmann.

8.1 Construction du Lagrangien

Nous voulons écrire le Lagrangien quadratique le plus général, pour un fermion unique, autorisé par la symétrie de Lorentz. Notre premier travail est donc de recenser les termes invariants sous Lorentz pouvant être construits avec les spineurs de Weyl ξ^α et $\eta_{\dot{\beta}}$ (formant le spineur de Dirac décrivant de manière habituelle une particule de matière), ainsi que le spineur de second rang $p^{\alpha\dot{\beta}}$ associé au quadri-vecteur impulsion p^μ . La présence ou non de ce dernier induit une partition entre les termes cinétiques (comportant l'opérateur différentiel $p^{\alpha\dot{\beta}}$) et les termes de masse (bâtis sur les seuls champs fermioniques ξ^α et $\eta_{\dot{\beta}}$).

8.1.1 Termes cinétiques

Les termes les plus généraux qu'il est possible d'écrire avec les spineurs ξ^α , $\eta_{\dot{\beta}}$ et $p^{\alpha\dot{\beta}}$ sont les suivants :

$$\xi_\alpha p^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}, \quad \xi_\alpha p^{\alpha\dot{\beta}} (\xi_\beta)^*, \quad (\eta_{\dot{\alpha}})^* p^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}, \quad (\eta_{\dot{\alpha}})^* p^{\alpha\dot{\beta}} (\xi_\beta)^*, \quad (8.1)$$

$$\eta^{\dot{\alpha}} p_{\dot{\alpha}\beta} \xi^\beta, \quad \eta^{\dot{\alpha}} p_{\dot{\alpha}\beta} (\eta^{\dot{\beta}})^*, \quad (\xi^\alpha)^* p_{\dot{\alpha}\beta} \xi^\beta, \quad (\xi^\alpha)^* p_{\dot{\alpha}\beta} (\eta^{\dot{\beta}})^*. \quad (8.2)$$

En utilisant les définitions (7.35) à (7.38) des champs conjugués de charge, ainsi que l'expression du spineur à deux indices, ces produits se réécrivent

$$(\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* (p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}, \quad (\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* (p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}^c, \quad (\eta_{\dot{\alpha}})^* (p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}, \quad (\eta_{\dot{\alpha}})^* (p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}^c, \quad (8.3)$$

$$(\xi^\alpha)^{c*} (p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})_{\dot{\alpha}\beta} \xi^\beta, \quad (\xi^\alpha)^{c*} (p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})_{\dot{\alpha}\beta} (\xi^\beta)^c, \quad (\xi^\alpha)^* (p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})_{\dot{\alpha}\beta} \xi^\beta, \quad (\xi^\alpha)^* (p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})_{\dot{\alpha}\beta} (\xi^\beta)^c. \quad (8.4)$$

Dans la suite nous écrirons les termes cinétiques sous une forme symétrique, faisant agir à chaque fois l'opérateur différentiel sur les deux champs, à sa gauche comme à sa droite. En utilisant le fait que le Lagrangien est toujours défini à une dérivée totale près, nous

pouvons écrire la relation $\psi \partial \chi = -(\partial \psi) \chi$ en négligeant le terme $\partial(\psi \chi)$, ce qui nous permet de définir

$$\psi \overleftrightarrow{\partial} \chi = \frac{1}{2}(\psi \partial \chi - (\partial \psi) \chi). \quad (8.5)$$

Il est important de bien remarquer qu'une telle notation permet de faire "commuter" les champs fermioniques. En effet, du fait même que ces champs anticommulent, nous pouvons écrire

$$\psi \overleftrightarrow{\partial} \chi = \frac{1}{2}(\psi \partial \chi - (\partial \psi) \chi) = \frac{1}{2}(-(\partial \chi) \psi + \chi \partial \psi) = \chi \overleftrightarrow{\partial} \psi. \quad (8.6)$$

Nos termes cinétiques prennent donc finalement la forme (en omettant volontairement les indices spinoriels de l'opérateur différentiel)

$$(\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \eta_{\dot{\beta}}, (\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \eta_{\dot{\beta}}^c, (\eta_{\dot{\alpha}})^* \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \eta_{\dot{\beta}}, (\eta_{\dot{\alpha}})^* \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \eta_{\dot{\beta}}^c, \quad (8.7)$$

$$(\xi^\alpha)^{c*} \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \xi^\beta, (\xi^\alpha)^{c*} \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} (\xi^\beta)^c, (\xi^\alpha)^* \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \xi^\beta, (\xi^\alpha)^* \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} (\xi^\beta)^c. \quad (8.8)$$

8.1.2 Termes de masse

En tenant compte des possibilités d'anticommutation des champs, les termes quadratiques invariants de Lorentz que nous pouvons écrire de la manière la plus générale à partir des deux spineurs de Weyl ξ^α et $\eta_{\dot{\alpha}}$ se réduisent aux huit produits suivants :

$$\xi_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi_\alpha (\eta^{\dot{\alpha}})^*, \quad (\xi^\alpha)^* (\xi_\alpha)^*, \quad (\xi^\alpha)^* \eta_{\dot{\alpha}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} \eta_{\dot{\alpha}}, \quad \eta^{\dot{\alpha}} (\xi_\alpha)^*, \quad (\eta_{\dot{\alpha}}^*) \xi^\alpha, \quad (\eta_{\dot{\alpha}}^*) (\eta^{\dot{\alpha}})^* \quad (8.9)$$

De même que pour les termes cinétiques, ceux-ci peuvent se réécrire en fonction des champs conjugués de charge comme

$$(\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* \xi^\alpha, (\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* (\xi^\alpha)^c, (\xi^\alpha)^* \eta_{\dot{\alpha}}^c, (\xi^\alpha)^* \eta_{\dot{\alpha}}, (\xi^\alpha)^{c*} \eta_{\dot{\alpha}}, (\xi^\alpha)^{c*} \eta_{\dot{\alpha}}^c, (\eta_{\dot{\alpha}}^*) \xi^\alpha, (\eta_{\dot{\alpha}}^*) (\xi^\alpha)^c. \quad (8.10)$$

8.1.3 Résumé

L'examen systématique des paragraphes précédents fait apparaître que les termes quadratiques les plus généraux autorisés par la symétrie de Lorentz mélangent les spineurs de Weyl ξ^α et $\eta_{\dot{\beta}}$, et leurs conjugués de charge, et qu'il n'est de ce fait pas possible de séparer un fermion de son antiparticule. Le Lagrangien doit décrire conjointement les deux entités, et est donc amené à s'écrire naturellement dans la base des quatre spineurs de Weyl à deux composantes mise en évidence dans les termes quadratiques précédemment étudiés :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ (\xi^\alpha)^c \\ (\eta_{\dot{\alpha}})^c \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ (\eta^{\dot{\alpha}})^* \\ (\xi_\alpha)^* \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad (8.11)$$

Dans cette base, le Lagrangien quadratique le plus général invariant sous la symétrie de Lorentz prend la forme suivante :

$$\mathcal{L} = \Psi^\dagger \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha_1 & a_1 & \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} & \\ b_1 & \beta_1 & & \\ \hline m_{L2} & m_2 & & \\ \mu_2 & m_{R2} & & \end{array} \begin{array}{cc} m_{L1} & \mu_1 \\ m_1 & m_{R1} \\ \hline \beta_2 & b_2 \\ a_2 & \alpha_2 \end{array} \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \right) \Psi. \quad (8.12)$$

μ_1, μ_2, m_1 et m_2 sont des masses de Dirac :

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \mu_1(\xi^\alpha)^* \eta_{\dot{\alpha}} + \mu_2(\eta_{\dot{\alpha}})^* \xi^\alpha + m_1(\xi^\alpha)^{c*}(\eta_{\dot{\alpha}})^c + m_2(\eta_{\dot{\alpha}})^{c*}(\xi^\alpha)^c \quad (8.13)$$

m_{L1}, m_{R1}, m_{L2} et m_{R2} sont des masses de Majorana :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Majorana}} &= m_{L1}(\xi^\alpha)^*(\eta_{\dot{\alpha}})^c + m_{L2}(\eta_{\dot{\alpha}})^{c*}\xi^\alpha + m_{R1}(\xi^\alpha)^{c*}\eta_{\dot{\alpha}} + m_{R2}(\eta_{\dot{\alpha}})^*(\xi^\alpha)^c \\ &= m_{L1}(\xi^\alpha)^*(\xi_\alpha)^* + m_{L2}\xi_\alpha\xi^\alpha + m_{R1}\eta^{\dot{\alpha}}\eta_{\dot{\alpha}} + m_{R2}(\eta_{\dot{\alpha}})^*(\eta^{\dot{\alpha}})^*. \end{aligned} \quad (8.14)$$

8.2 Contraintes *PCT* sur le Lagrangien

Il n'est pas aisé de déterminer la juste forme des contraintes engendrées par la symétrie *PCT* sur le Lagrangien classique, et une telle entreprise n'est pas dépourvue d'ambiguïtés. Nous pouvons être tentés de prime abord de traiter la symétrie *PCT* de manière analogue à n'importe quelle symétrie d'espace-temps, et d'exprimer l'invariance du Lagrangien, considéré comme fonctionnelle des champs classiques, de la manière suivante :

$$\mathcal{L}[\Theta\Psi(-x)] = \mathcal{L}[\Psi(x)] \quad (8.15)$$

Cependant cette définition se révèle largement insatisfaisante dans la mesure où le Lagrangien dans les champs transformés $\mathcal{L}[\Theta\Psi(-x)]$ se trouve être en fait égal à l'opposé $-\mathcal{L}[\Psi(x)]$ du Lagrangien de départ, comme cela peut se vérifier de manière simple, par exemple pour un terme de masse : $\Theta((\xi^\alpha)^*)\Theta(\eta_{\dot{\alpha}}) = -(\xi^\alpha)^*\eta_{\dot{\alpha}}$.

Pour obtenir une définition rigoureuse de l'invariance du Lagrangien sous la transformation *PCT*, il est préférable de considérer ce dernier du point de vue de la quantification canonique comme un opérateur. Dans cette approche, les champs fermioniques ne sont plus des fonctions classiques grassmanniennes mais des opérateurs agissant dans l'espace de Fock des états du système. L'invariance du Lagrangien $\mathcal{L}^\Theta = \mathcal{L}$ s'exprime alors, grâce à la loi (7.15) de transformation d'un opérateur sous une symétrie antiunitaire, comme

$$(\Theta\mathcal{L}(x)\Theta^{-1})^\dagger = \mathcal{L}(-x). \quad (8.16)$$

Prenons l'exemple d'un terme de masse. Nous obtenons

$$\begin{aligned} (\Theta(\xi^\alpha)^\dagger(x)\mu_1\eta_{\dot{\alpha}}(x)\Theta^{-1})^\dagger &= (\Theta(\xi^\alpha)^\dagger(x)\Theta^{-1}\Theta\mu_1\Theta^{-1}\Theta\eta_{\dot{\alpha}}(x)\Theta^{-1})^\dagger \\ &= (\Theta\eta_{\dot{\alpha}}(x)\Theta^{-1})^\dagger(\Theta\mu_1\Theta^{-1})^\dagger(\Theta(\xi^\alpha)^*(x)\Theta^{-1})^\dagger \\ &= (-i)\eta_{\dot{\alpha}}(-x)\mu_1(-i)(\xi^\alpha)^\dagger(-x) \\ &= -\eta_{\dot{\alpha}}(-x)\mu_1(\xi^\alpha)^\dagger(x). \end{aligned} \quad (8.17)$$

L'action de la symétrie *PCT* sur le Lagrangien est donc caractérisée non seulement par la transformation des champs selon les lois définies dans la section (7.5), mais également par l'inversion des produits de ces champs, qui consiste à les lire de la droite vers la gauche, et non pas de la gauche vers la droite. Cette règle d'inversion a été introduite par Schwinger [46], suivi en cela par Pauli [47], et la procédure de transformation du Lagrangien faisant suivre la transformation des champs de l'inversion est désignée sous le nom de convention de Schwinger-Pauli. Elle suppose que les produits des champs de fermions soient antisymétrisés pour toutes les permutation des champs, auquel cas dans l'exemple ci-dessus, le terme de masse $\mu_1((\xi^\alpha)^\dagger\eta_{\dot{\alpha}} - \eta_{\dot{\alpha}}(\xi^\alpha)^\dagger)$ est invariant sous *PCT*.

Nous choisissons donc d'adopter cette même règle de transformation sous PCT pour notre Lagrangien classique, dont les champs sont des fonctions grassmanniennes, en conservant néanmoins les produits de spineurs sous une forme simple, non antisymétrisée. Cependant, afin de prendre en compte la statistique de Fermi-Dirac, et de pouvoir identifier terme à terme le Lagrangien transformé avec le Lagrangien primitif (dans la variable $-x$), nous faisons anticommuer les champs dans une dernière étape de la procédure de transformation, ce qui nous permet de restaurer leur ordre initial.

Le résultat pour les termes de masse est strictement identique à celui obtenu par le calcul ci-dessus, à la différence près que la conjugaison hermitienne est remplacée par la conjugaison complexe, et qu'une anticommutation supplémentaire permet de retrouver l'ordre de départ, tout en supprimant le signe $(-)$. La transformation PCT s'écrit donc

$$(\xi^\alpha)^*(x)\mu_1\eta_{\dot{\alpha}}(x) \xrightarrow{PCT} (\xi^\alpha)^*(-x)\mu_1\eta_{\dot{\alpha}}(-x). \quad (8.18)$$

Nous retrouvons dans le membre de droite le terme correspondant du Lagrangien $\mathcal{L}(-x)$, ce qui montre que les termes de masse sont invariants sous la transformation PCT .

La même procédure s'applique aux termes cinétiques. Le transformé de l'opérateur différentiel $p_\mu = i\partial_\mu$ est

$$(\Theta p_\mu \Theta^{-1})^\dagger = i(\Theta \partial_\mu \Theta^{-1})^\dagger = -i\partial_\mu = -p_\mu \quad (8.19)$$

du fait de l'inversion $x \rightarrow -x$. Le spineur correspondant $p^{\alpha\dot{\beta}}$ (resp. $p_{\dot{\alpha}\beta}$) devient donc $-p^{\alpha\dot{\beta}}$ (resp. $-p_{\dot{\alpha}\beta}$). Prenons l'exemple d'un terme diagonal :

$$(\xi^\alpha)^*(x)\overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})}\xi^\beta(x) \xrightarrow{PCT} (\xi^\beta)^\Theta(-x)\overleftrightarrow{(-)(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})}((\xi^\alpha)^*)^\Theta(-x) \quad (8.20)$$

$$= -i\xi^\beta(-x)\overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})}(-i)(\xi^\alpha)^*(-x) \quad (8.21)$$

$$= -\xi^\beta(-x)\overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})}(\xi^\alpha)^*(-x). \quad (8.22)$$

Comme pour les termes de masse, le membre de droite s'identifie à son correspondant dans le Lagrangien d'arguments inversés $\mathcal{L}(-x)$.

Ainsi les termes cinétiques, comme les termes de masse, apparaissent invariants sous la transformation PCT . Tous ces produits de champs fermioniques n'ont aucune caractéristique particulière sinon celle d'être, par construction, invariants de Lorentz. Nous obtenons donc une illustration très simple du théorème PCT sous sa forme lagrangienne, à savoir que le Lagrangien quadratique le plus général invariant sous les transformations de Lorentz (8.12), possède de fait la symétrie PCT .

8.3 Contraintes internes

Du fait que les champs conjugués de charge sont exprimés en fonction des conjugués complexes des champs de Weyl, il est possible d'écrire grâce à l'anticommutation des champs un certain nombre de relations entre les différents termes du Lagrangien, qui réduisent le nombre de paramètres de (8.12). Ces relations font intervenir également l'anticommutation des champs, définis au niveau du Lagrangien classique comme des variables de Grassmann.

Commençons donc par regarder ce qu'il advient pour un terme de masse :

$$\mu_1(\xi^\alpha)^*\eta_{\dot{\alpha}} = \mu_1(\xi^\alpha)^*\eta_{\dot{\beta}}\delta_{\alpha\beta} = \mu_1(\xi_\gamma)^*\eta^{\dot{\delta}}\delta_{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\gamma}^2\sigma_{\beta\delta}^2$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_1 \eta_{\dot{\alpha}}^c (\xi^{\delta})^{c*} \delta_{\alpha\beta} (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}) \\
&= -\mu_1 (\xi^{\delta})^{c*} \eta_{\dot{\alpha}}^c \delta_{\alpha\beta} (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}) \\
&= -\mu_1 ((\xi^{\alpha})^{c*} \eta_{\dot{\beta}}^c \delta_{\alpha\beta} - (\xi^{\gamma})^{c*} \eta_{\dot{\gamma}}^c \delta_{\alpha\beta}) \\
&= -\mu_1 ((\xi^{\alpha})^{c*} \eta_{\dot{\alpha}}^c - 2(\xi^{\alpha})^{c*} \eta_{\dot{\alpha}}^c) \\
&= \mu_1 (\xi^{\alpha})^{c*} \eta_{\dot{\alpha}}^c,
\end{aligned} \tag{8.23}$$

d'où nous pouvons déduire $\mu_1 = m_1$. Nous obtenons pour les autres masses de Dirac la relation analogue $\mu_2 = m_2$. En revanche les termes de masse de Majorana conduisent à des tautologies et n'offrent pas de contraintes supplémentaires.

Considérons maintenant un exemple parmi les termes cinétiques. Ici encore il nous faut garder à l'esprit que la notation symétrique $\overleftrightarrow{\partial}$ que nous avons adoptée nous permet de faire commuter les champs fermioniques. Nous obtenons donc par exemple

$$\begin{aligned}
\alpha_1 (\xi^{\alpha})^* (\overleftrightarrow{p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}})_{\dot{\alpha}\beta} \xi^{\beta} &= \alpha_1 \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} (\xi_{\dot{\gamma}})^* (\overleftrightarrow{p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}})_{\dot{\alpha}\beta} \epsilon^{\beta\delta} \xi_{\delta} \\
&= \alpha_1 (\xi_{\dot{\gamma}})^* (\sigma^2)^{\dot{\gamma}\dot{\alpha}} (\overleftrightarrow{p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}})_{\dot{\alpha}\beta} (\sigma^2)^{\beta\delta} \xi_{\delta} \\
&= \alpha_1 (\xi_{\dot{\gamma}})^* (\overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})^*})^{\dot{\gamma}\delta} \xi_{\delta} \\
&= \alpha_1 (\xi_{\dot{\gamma}})^* (\overleftrightarrow{p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}})^{\delta\dot{\gamma}} \xi_{\delta} \\
&= \alpha_1 \xi_{\delta} (\overleftrightarrow{p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}})^{\delta\dot{\gamma}} (\xi_{\dot{\gamma}})^* \\
&= \alpha_1 (\eta_{\dot{\delta}}^c)^* (\overleftrightarrow{p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}})^{\delta\dot{\gamma}} (\eta_{\dot{\gamma}})^c
\end{aligned} \tag{8.24}$$

d'où vient, en identifiant avec le terme $\beta_2 (\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* (\overleftrightarrow{p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}})^{\alpha\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}^c$, la relation $\alpha_1 = \beta_2$. De même, les autres termes cinétiques permettent d'obtenir $\alpha_2 = \beta_1$, $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

Ainsi, le Lagrangien quadratique le plus général possédant la symétrie de Lorentz s'écrit sous la forme

$$\mathcal{L} = \psi^{\dagger} \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & a & \overleftrightarrow{p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}} & \\ b & \beta & & \\ \hline m_{L2} & m_2 & & \\ m_2 & m_{R2} & & \end{array} \middle| \begin{array}{cc} m_{L1} & m_1 \\ m_1 & m_{R1} \\ \hline \alpha & b \\ a & \beta \end{array} \overleftrightarrow{p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}} \right) \Psi. \tag{8.25}$$

8.4 Contraintes données par C

Le Lagrangien transformé par C correspond au Lagrangien dans lequel les spineurs de Weyl sont remplacés par leurs spineurs conjugués, comme cela est manifeste pour le Lagrangien opératoire de la quantification canonique :

$$\mathcal{C} \mathcal{L} \mathcal{C}^{-1} = \mathcal{L} \tag{8.26}$$

Dès lors, la condition que le Lagrangien soit invariant sous la conjugaison de charge se traduit de manière simple par

$$\mathcal{L}[\Psi^c] = \mathcal{L}[\Psi]. \tag{8.27}$$

Les contraintes apportées par la symétrie \mathcal{C} se confondent, pour les termes de masse de Dirac, avec les contraintes internes vues dans le paragraphe précédent. Pour les termes de masse de Majorana, en revanche, l'invariance par C entraîne $m_{L1} = m_{R1}$ et $m_{L2} = m_{R2}$. Enfin pour les termes cinétiques, la symétrie C impose $\alpha = \beta$ et $a = b$.

La symétrie \mathcal{C} contraint donc le Lagrangien à prendre la forme suivante, dans laquelle chacune des quatre sous-matrices 2×2 est symétrique :

$$L_C = \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha & a \\ a & \alpha \end{array} \right) \overleftarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} & \begin{array}{cc} \rho_1 & m_1 \\ m_1 & \rho_1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} \rho_2 & m_2 \\ m_2 & \rho_2 \end{array} & \left(\begin{array}{cc} \alpha & a \\ a & \alpha \end{array} \right) \overleftarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \end{array} \right) \quad (8.28)$$

Chapitre 9

Propagateur pour une génération

9.1 Le propagateur fermionique

Le propagateur fermionique $S(x)$ d'un système décrit par une base de n champs $(\psi_i)_{i=1\dots n}$ est une matrice dotée d'une structure de tenseur de Lorentz dont les éléments sont les valeurs moyennes dans le vide des produits chronologiques (ou T-produits) de deux opérateurs fermioniques :

$$S_{ij}^{\alpha\beta}(x) = \langle 0 | T(\psi_i)^\alpha(\frac{x}{2})(\psi_j^\dagger)^\beta(-\frac{x}{2}) | 0 \rangle, \quad (9.1)$$

où l'on rappelle la définition du produit chronologique

$$T\psi(x)\chi(y) = \theta(x^0 - y^0)\psi(x)\chi(y) - \theta(y^0 - x^0)\chi(y)\psi(x). \quad (9.2)$$

Nous omettrons dans la suite les indices α, β de Lorentz ainsi que les indices i, j de numérotation des champs, et noterons simplement $S(x)$.

Nous travaillons, comme pour le cas du Lagrangien, dans la base constituée des quatre fermions de Weyl $(\xi^\alpha, (\xi^\alpha)^c, (\eta_{\dot{\alpha}})^c, \eta_{\dot{\alpha}})$ décrivant de manière simultanée un fermion unique et son antiparticule. Notre propagateur fermionique est donc une matrice 4×4 dont les éléments correspondent à différents types de T-produits :

- propagateurs de type "masse" :

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T\xi^\alpha(x)(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ et } \langle 0 | T(\xi^\alpha)^c(x)((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ (Dirac),} \\ & \langle 0 | T(\eta_{\dot{\alpha}})^c(x)((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ et } \langle 0 | T\eta_{\dot{\alpha}}(x)(\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ (Dirac),} \\ & \langle 0 | T\xi^\alpha(x)((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ et } \langle 0 | T(\xi^\alpha)^c(x)(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ (Majorana),} \\ & \langle 0 | T(\eta_{\dot{\alpha}})^c(x)(\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ et } \langle 0 | T\eta_{\dot{\alpha}}(x)((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ (Majorana).} \end{aligned}$$

- propagateurs de type "cinétique" :

$$\begin{aligned} & \langle 0 | T\xi^\alpha(x)(\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ et } \langle 0 | T(\xi^\alpha)^c(x)((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ (diagonal),} \\ & \langle 0 | T(\eta_{\dot{\alpha}})^c(x)((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ et } \langle 0 | T\eta_{\dot{\alpha}}(x)(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ (diagonal),} \\ & \langle 0 | T\xi^\alpha(x)((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ et } \langle 0 | T(\xi^\alpha)^c(x)(\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ (non-diagonal),} \\ & \langle 0 | T(\eta_{\dot{\alpha}})^c(x)(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ et } \langle 0 | T\eta_{\dot{\alpha}}(x)((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x) | 0 \rangle \text{ (non-diagonal).} \end{aligned}$$

9.2 Contraintes \mathcal{PCT} sur le propagateur

En suivant l'approche fondamentale de Streater et Wightman [44], on montre que la présence de la symétrie \mathcal{PCT} , c'est à dire d'un opérateur antilinéaire défini par les lois de transformation des champs (fixées dans notre cas par les équations (7.72) à (7.75)), et laissant le vide invariant ($\Theta|0\rangle = |0\rangle$)¹, se traduit par certaines propriétés pour les valeurs moyennes dans le vide de produits d'opérateurs de champ. Dans le cas le plus simple de deux opérateurs (qui correspond à celui du propagateur), ces relations s'écrivent sous la forme

$$\langle 0 | \psi(x) \chi(y) | 0 \rangle = \langle \Theta^{-1} 0 | \psi(x) \chi(y) | \Theta^{-1} 0 \rangle = \langle 0 | (\Theta \psi(x) \Theta^{-1}) (\Theta \chi(y) \Theta^{-1}) | 0 \rangle^* \quad (9.3)$$

d'où, avec $(\varphi)^\Theta(-x) = (\Theta \varphi(x) \Theta^{-1})^\dagger$,

$$\langle 0 | \psi(x) \chi(y) | 0 \rangle = \langle 0 | (\Theta \chi(y) \Theta^{-1})^\dagger (\Theta \psi(x) \Theta^{-1})^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | (\chi)^\Theta(-y) (\psi)^\Theta(-x) | 0 \rangle \quad (9.4)$$

c'est à dire, au final

$$\langle 0 | \psi(x) \chi(y) | 0 \rangle = \langle 0 | (\chi)^\Theta(-y) (\psi)^\Theta(-x) | 0 \rangle = \langle 0 | (\psi(x) \chi(y))^\Theta | 0 \rangle. \quad (9.5)$$

Ainsi, la symétrie Θ relie chaque produit d'opérateurs de champs au produit de leurs transformés par \mathcal{PCT} écrit dans l'ordre inverse. Cette dernière caractéristique est la conséquence de l'antiunitarité de la symétrie \mathcal{PCT} . Elle correspond précisément à la convention de Schwinger-Pauli utilisée pour exprimer cette symétrie dans le Lagrangien.

9.2.1 Contraintes

La relation (9.5) entraîne des contraintes pour les moyennes dans le vide des T-produits d'opérateurs de champ constituant les éléments de matrice du propagateur fermionique. Il est important dans le calcul des relations correspondantes de prendre soin de décomposer le produit chronologique selon (9.2) pour ne pas commettre d'erreur lors de l'inversion des arguments des transformés des champs par \mathcal{PCT} .

Produits de type masse

Pour les propagateurs qui sont du type "masse", les contraintes s'expriment de la façon suivante :

- Majorana :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \xi^\alpha(x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x) | 0 \rangle &= \langle 0 | T \xi^\alpha(-x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(x) | 0 \rangle \\ \langle 0 | T (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) (\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 \rangle &= \langle 0 | T (\eta_{\dot{\alpha}})^c(-x) (\xi^\beta)^\dagger(x) | 0 \rangle \\ \langle 0 | T (\xi^\alpha)^c(x) (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 \rangle &= \langle 0 | T (\xi^\alpha)^c(-x) (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(x) | 0 \rangle \\ \langle 0 | T \eta_{\dot{\alpha}}(x) ((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x) | 0 \rangle &= \langle 0 | T \eta_{\dot{\alpha}}(-x) ((\xi^\beta)^c)^\dagger(x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (9.6)$$

- Dirac :

$$\langle 0 | T \xi^\alpha(x) (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 \rangle = \langle 0 | T \xi^\alpha(-x) (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(x) | 0 \rangle$$

¹Comme $\Theta^2 = 1$, l'invariance du vide peut également s'écrire $\Theta^{-1}|0\rangle = |0\rangle$

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \eta_{\dot{\alpha}}(x) (\xi^{\beta})^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= \langle 0 | T \eta_{\dot{\alpha}}(-x) (\xi^{\beta})^{\dagger}(x) | 0 \rangle \\
\langle 0 | T (\xi^{\alpha})^c(x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= \langle 0 | T (\xi^{\alpha})^c(-x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^{\dagger}(x) | 0 \rangle \\
\langle 0 | T (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) ((\xi^{\beta})^c)^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= \langle 0 | T (\eta_{\dot{\alpha}})^c(-x) ((\xi^{\beta})^c)^{\dagger}(x) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{9.7}$$

Nous donnons ci-dessous un exemple de calcul pour un terme de Dirac :

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \xi^{\alpha}(x) (\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= \langle 0 | \theta(t) \xi^{\alpha}(x) (\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(-x) | 0 \rangle - \langle 0 | \theta(-t) (\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(-x) \xi^{\alpha}(x) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \theta(t) (\eta_{\dot{\beta}}^{\dagger})^{\Theta}(x) (\xi^{\alpha})^{\Theta}(-x) | 0 \rangle - \langle 0 | \theta(-t) (\xi^{\alpha})^{\Theta}(-x) (\eta_{\dot{\beta}}^{\dagger})^{\Theta}(x) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \theta(t) i (\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(x) i \xi^{\alpha}(-x) | 0 \rangle - \langle 0 | \theta(-t) i \xi^{\alpha}(-x) i (\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(x) | 0 \rangle \\
&= -\langle 0 | \theta(t) (\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(x) \xi^{\alpha}(-x) | 0 \rangle + \langle 0 | \theta(-t) \xi^{\alpha}(-x) (\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(x) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | T \xi^{\alpha}(-x) (\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(x) | 0 \rangle.
\end{aligned} \tag{9.8}$$

Produits de type cinétique

Les contraintes PCT ont la forme suivante pour les propagateurs de type cinétique :

- Diagonaux :

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \xi^{\alpha}(x) (\xi^{\beta})^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= -\langle 0 | T \xi^{\alpha}(-x) (\xi^{\beta})^{\dagger}(x) | 0 \rangle \\
\langle 0 | T (\xi^{\alpha})^c(x) ((\xi^{\beta})^c)^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= -\langle 0 | T (\xi^{\alpha})^c(-x) ((\xi^{\beta})^c)^{\dagger}(x) | 0 \rangle \\
\langle 0 | T (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= -\langle 0 | T (\eta_{\dot{\alpha}})^c(-x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^{\dagger}(x) | 0 \rangle \\
\langle 0 | T \eta_{\dot{\alpha}}(x) (\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= -\langle 0 | T \eta_{\dot{\alpha}}(-x) (\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(x) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{9.9}$$

- Non-diagonaux :

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \xi^{\alpha}(x) ((\xi^{\beta})^c)^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= -\langle 0 | T \xi^{\alpha}(x) ((\xi^{\beta})^c)^{\dagger}(-x) | 0 \rangle \\
\langle 0 | T (\xi^{\alpha})^c(x) (\xi^{\beta})^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= -\langle 0 | T (\xi^{\alpha})^c(x) (\xi^{\beta})^{\dagger}(-x) | 0 \rangle \\
\langle 0 | T (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) (\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= -\langle 0 | T (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) (\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(-x) | 0 \rangle \\
\langle 0 | T \eta_{\dot{\alpha}}(x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= -\langle 0 | T \eta_{\dot{\alpha}}(x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^{\dagger}(-x) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Nous donnons ci-dessous un exemple de calcul pour un terme diagonal :

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \xi^{\alpha}(x) (\xi^{\beta})^{\dagger}(-x) | 0 \rangle &= \langle 0 | \theta(t) \xi^{\alpha}(x) (\xi^{\beta})^{\dagger}(-x) | 0 \rangle - \langle 0 | \theta(-t) (\xi^{\beta})^{\dagger}(-x) \xi^{\alpha}(x) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \theta(t) (\xi^{\beta\dagger})^{\Theta}(x) (\xi^{\alpha})^{\Theta}(-x) | 0 \rangle - \langle 0 | \theta(-t) (\xi^{\alpha})^{\Theta}(-x) (\xi^{\beta\dagger})^{\Theta}(x) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \theta(t) (-i \xi^{\beta\dagger})(x) i \xi^{\alpha}(-x) | 0 \rangle - \langle 0 | \theta(-t) i \xi^{\alpha}(-x) (-i \xi^{\beta\dagger})(x) | 0 \rangle \\
&= \langle 0 | \theta(t) (\xi^{\beta})^{\dagger}(x) \xi^{\alpha}(-x) | 0 \rangle - \langle 0 | \theta(-t) \xi^{\alpha}(-x) (\xi^{\beta})^{\dagger}(x) | 0 \rangle \\
&= -\langle 0 | T \xi^{\alpha}(-x) (\xi^{\beta})^{\dagger}(x) | 0 \rangle.
\end{aligned} \tag{9.11}$$

9.2.2 Propagateur invariant sous \mathcal{PCT}

Une première réalisation

Nous voyons donc que tous les propagateurs de type masse sont invariants sous la 4-inversion $x \rightarrow -x$, c'est à dire dans l'espace de Fourier, sous la transformation $p_\mu \rightarrow -p_\mu$. A l'inverse les propagateurs de type cinétique acquièrent un signe moins sous l'inversion d'espace-temps. Ces résultats, obtenus de manière abstraite pour les valeurs propres dans le vide de produits chronologiques d'opérateurs, sont cohérents avec la forme connue du propagateur de Feynman pour un fermion de Dirac de masse m :

$$S_F(x-y) = \langle 0 | T\psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \quad (9.12)$$

En effet le spineur de Dirac ψ s'écrit en termes des spineurs de Weyl comme $\psi = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$, d'où :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T\psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \langle 0 | T \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} (x) \begin{pmatrix} (\xi^\beta)^\dagger & (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger \end{pmatrix} (-x) \gamma^0 | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | T \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} (x) \begin{pmatrix} (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger & (\xi^\beta)^\dagger \end{pmatrix} (-x) \gamma^0 | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.13)$$

• Pour un propagateur de type masse nous avons ainsi (en prenant l'exemple d'une masse de Dirac), pour $\alpha, \beta = 1, 2$:

$$\langle 0 | T\xi^\alpha(x)(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 \rangle = \langle 0 | T\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^\beta(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{(\gamma_{\alpha\beta}^\mu p_\mu + m\delta_{\alpha\beta})}{p^2 - m^2}. \quad (9.14)$$

Dans la représentation de Weyl des matrices gamma, les éléments $\gamma_{\alpha\beta}^\mu$ sont nuls pour tous $(\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2$. Le terme proportionnel à l'impulsion p_μ est donc nul, tandis que le terme de masse $m\delta_{\alpha\beta}$ est diagonal.

• Dans le cas d'un propagateur de type cinétique, nous avons (en prenant l'exemple d'un terme diagonal), pour $\alpha, \beta = 1, 2$:

$$\langle 0 | T\xi^\alpha(x)(\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 \rangle = \langle 0 | T\psi^\alpha(x)\bar{\psi}^{\beta+2}(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \frac{(\gamma_{\alpha, \beta+2}^\mu p_\mu + m\delta_{\alpha, \beta+2})}{p^2 - m^2}. \quad (9.15)$$

Pour tous $(\alpha, \beta) \in \{1, 2\}^2$, le terme de masse proportionnel à $\delta_{\alpha, \beta+2}$ s'annule, tandis que la partie en p_μ est non nulle cette fois-ci, et subsiste donc seule.

Le propagateur de Feynman habituel nous confirme donc la validité des résultats obtenus sur les valeurs moyennes dans le vide de T-produits d'opérateurs de champ. En outre, il nous permet de déduire la forme des éléments de notre propagateur impliquée par les contraintes \mathcal{PCT} sur ses éléments de matrice :

- les propagateurs de type masse, qui restent invariants sous \mathcal{PCT} , doivent être pairs dans l'impulsion p et donc s'écrire comme $f(p^2)\delta_{\alpha\beta}$;
- les propagateurs de type cinétique, qui héritent d'un signe (-) sous \mathcal{PCT} , doivent être impairs dans l'impulsion et donc revêtir la forme $g(p^2)p_\mu\sigma_{\alpha\beta}^\mu$ ou $h(p^2)p_\mu\bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu$.

Les contraintes apportées par la symétrie \mathcal{PCT} nous permettent donc de proposer un ansatz, c'est à dire une réalisation concrète de notre propagateur dans l'espace des impulsions :

$$S(p) = \left(\frac{\begin{pmatrix} \alpha_1(p^2) & a_1(p^2) \\ b_1(p^2) & \beta_1(p^2) \end{pmatrix} p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta}}{\begin{pmatrix} m_{L2}(p^2) & m_2(p^2) \\ \mu_2(p^2) & m_{R2}(p^2) \end{pmatrix} \delta_{\alpha\beta}} \middle| \frac{\begin{pmatrix} m_{L1}(p^2) & \mu_1(p^2) \\ m_1(p^2) & m_{R1}(p^2) \end{pmatrix} \delta_{\alpha\beta}}{\begin{pmatrix} \beta_2(p^2) & b_2(p^2) \\ a_2(p^2) & \alpha_2(p^2) \end{pmatrix} p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta}} \right). \quad (9.16)$$

Dans la suite, nous travaillerons à partir de cette forme concrète, qui inclut par construction l'invariance sous \mathcal{PCT} , afin d'obtenir, comme nous l'avons fait pour le Lagrangien, des contraintes explicites sur le propagateur à partir des autres symétries discrètes.

Contraintes internes

Les 16 paramètres complexes de l'ansatz précédent ne sont en réalité pas tous indépendants. Ils satisfont certaines relations, ou contraintes internes, qui s'originent dans la définition même des champs conjugués de charge présents dans la base $(\xi^\alpha, (\xi^\alpha)^c, (\eta_\alpha)^c, \eta_\alpha)$ décrivant le système.

Prenons l'exemple d'un propagateur de type "masse de Dirac". Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \xi^\alpha(x) (\eta_\beta)^\dagger(-x) | 0 \rangle &= \sigma_{\alpha\gamma}^2 \sigma_{\beta\delta}^2 \langle 0 | T \xi_\gamma(x) (\eta_\delta)^\dagger(-x) | 0 \rangle \\ &= (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\beta} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}) \langle 0 | T (\eta_\gamma^c)^\dagger(x) (\xi^\delta)^c(-x) | 0 \rangle \\ &= -(\delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\beta} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta}) \langle 0 | T (\xi^\delta)^c(-x) (\eta_\gamma^c)^\dagger(x) | 0 \rangle \\ &= -\langle 0 | T (\xi^\alpha)^c(-x) (\eta_\beta^c)^\dagger(x) | 0 \rangle \\ &\quad + \delta_{\alpha\beta} \langle 0 | T (\xi^\gamma)^c(-x) (\eta_\gamma^c)^\dagger(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Cette relation se traduit, à l'aide de l'ansatz (9.16) par

$$\mu_1(p^2) \delta_{\alpha\beta} = -m_1(p^2) \delta_{\alpha\beta} + m_1(p^2) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\gamma} = -m_1(p^2) \delta_{\alpha\beta} + 2m_1(p^2) \delta_{\alpha\beta} = m_1(p^2) \delta_{\alpha\beta}, \quad (9.18)$$

c'est à dire

$$\mu_1(p^2) = m_1(p^2). \quad (9.19)$$

Nous obtenons également de la sorte la relation similaire pour l'autre propagateur du même type : $\mu_2(p^2) = m_2(p^2)$.

Pour les propagateurs de type "masse de Majorana", la démarche précédente entraine une tautologie :

$$\langle 0 | T \xi^\alpha(x) (\eta_\beta^c)^\dagger(-x) | 0 \rangle = -\langle 0 | T \xi^\alpha(-x) (\eta_\beta^c)^\dagger(x) | 0 \rangle + \delta_{\alpha\beta} \langle 0 | T \xi^\gamma(x) (\eta_\gamma^c)^\dagger(-x) | 0 \rangle, \quad (9.20)$$

d'où $m_{L1}(p^2) = m_{L1}(p^2)$, et de même $m_{L2}(p^2) = m_{L2}(p^2)$, $m_{R1}(p^2) = m_{R1}(p^2)$ et $m_{R2}(p^2) = m_{R2}(p^2)$.

Nous pouvons suivre la même procédure pour les termes cinétiques. Nous obtenons par exemple dans le cas diagonal

$$\langle 0 | T \xi^\alpha(x) (\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 \rangle = \langle 0 | T \eta_\alpha^c(-x) (\eta_\beta^c)^\dagger(x) | 0 \rangle - \delta_{\alpha\beta} \langle 0 | T \eta_\gamma^c(-x) (\eta_\gamma^c)^\dagger(x) | 0 \rangle, \quad (9.21)$$

ce qui entraine, avec (9.16)² :

$$\alpha_1(p^2) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta} = -\beta_2(p^2) p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \beta_2(p^2) p_\mu \sigma^\mu_{\gamma\gamma}$$

²Le signe (-) global apparaissant dans les termes du membre de droite est dû à l'inversion des signes des arguments des champs dans les valeurs moyennes des T-produits correspondants.

$$\begin{aligned}
&= -\beta_2(p^2)(p_0\sigma_{\alpha\beta}^0 - p_i\sigma_{\alpha\beta}^i) + 2\delta_{\alpha\beta}\beta_2(p^2)p_0 \\
&= -\beta_2(p^2)p_0\sigma_{\alpha\beta}^0 + \beta_2(p^2)p_i\sigma_{\alpha\beta}^i + 2\sigma_{\alpha\beta}^0\beta_2(p^2)p_0 \\
&= +\beta_2(p^2)p_0\sigma_{\alpha\beta}^0 + \beta_2(p^2)p_i\sigma_{\alpha\beta}^i \\
&= \beta_2(p^2)p_\mu\overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{9.22}$$

d'où

$$\alpha_1(p^2) = \beta_2(p^2). \tag{9.23}$$

On obtient de même $\alpha_2(p^2) = \beta_1(p^2)$, ainsi que $a_1(p^2) = a_2(p^2)$ et $b_1(p^2) = b_2(p^2)$ pour les propagateurs de type cinétique non-diagonal.

Ainsi, les contraintes internes entraînées par le lien existant entre les spineurs de Weyl et leurs conjugués de charge, permettent de simplifier la forme (9.16) du propagateur en réduisant le nombre de paramètres complexes de l'ansatz de 16 à 10. Le propagateur \mathcal{PCT} invariant le plus général s'écrit donc finalement

$$S_{PCT}(p) = \left(\frac{\begin{pmatrix} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ b(p^2) & \beta(p^2) \end{pmatrix} p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu}{\begin{pmatrix} m_{L2}(p^2) & m_2(p^2) \\ m_2(p^2) & m_{R2}(p^2) \end{pmatrix} \delta_{\alpha\beta}} \middle| \frac{\begin{pmatrix} m_{L1}(p^2) & m_1(p^2) \\ m_1(p^2) & m_{R1}(p^2) \end{pmatrix} \delta_{\alpha\beta}}{\begin{pmatrix} \alpha(p^2) & b(p^2) \\ a(p^2) & \beta(p^2) \end{pmatrix} p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta}} \right). \tag{9.24}$$

C'est cette forme du propagateur, comprenant par définition la symétrie \mathcal{PCT} , que nous utiliserons dans la suite.

9.3 Contraintes données par \mathcal{C}

La condition que la conjugaison de charge \mathcal{C} soit une symétrie de la théorie se traduit par certaines relations entre les éléments du propagateur :

$$\langle 0 | \psi(x)\chi(y) | 0 \rangle = \langle \mathcal{C}^{-1}0 | \psi(x)\chi(y) | \mathcal{C}^{-1}0 \rangle = \langle 0 | (\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1})(\mathcal{C}\chi(y)\mathcal{C}^{-1}) | 0 \rangle \tag{9.25}$$

c'est à dire, comme $(\varphi)^{\mathcal{C}}(x) = \mathcal{C}\varphi(x)\mathcal{C}^{-1}$,

$$\langle 0 | \psi(x)\chi(y) | 0 \rangle = \langle 0 | (\psi)^{\mathcal{C}}(x)(\chi)^{\mathcal{C}}(y) | 0 \rangle. \tag{9.26}$$

La symétrie \mathcal{C} contraint donc le propagateur à prendre la forme suivante, dans laquelle chacune des quatre sous-matrices est symétrique :

$$S_C(p) = \left(\frac{\begin{pmatrix} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{pmatrix} p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu}{\begin{pmatrix} \rho_2(p^2) & m_2(p^2) \\ m_2(p^2) & \rho_2(p^2) \end{pmatrix} \delta_{\alpha\beta}} \middle| \frac{\begin{pmatrix} \rho_1(p^2) & m_1(p^2) \\ m_1(p^2) & \rho_1(p^2) \end{pmatrix} \delta_{\alpha\beta}}{\begin{pmatrix} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{pmatrix} p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta}} \right). \tag{9.27}$$

9.4 Contraintes données par \mathcal{P}

De manière semblable, la présence de la symétrie \mathcal{P} entraîne les propriétés suivantes pour les valeurs moyennes dans le vide des T-produits d'opérateurs de champ :

$$\langle 0 | \psi(x^0, \vec{x})\chi(y^0, \vec{y}) | 0 \rangle = \langle 0 | (\psi)^{\mathcal{P}}(x^0, -\vec{x})(\chi)^{\mathcal{P}}(y^0, -\vec{y}) | 0 \rangle. \tag{9.28}$$

Pour les termes de type masse nous avons par exemple (ici avec une masse de Majorana)

$$\langle 0 | T \xi^\alpha(x^0, \vec{x}) (\eta_{\dot{\beta}}^c)^\dagger(-x^0, -\vec{x}) | 0 \rangle = \langle 0 | T \eta_{\dot{\alpha}}(x^0, -\vec{x}) ((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x^0, \vec{x}) | 0 \rangle. \quad (9.29)$$

d'où $m_{L1}(p^2) = m_{R2}(p^2)$, et de même $m_{R1}(p^2) = m_{L2}(p^2)$ et $m_1(p^2) = m_2(p^2)$.

Pour les termes de type cinétique, l'inversion des arguments spatiaux des champs entraîne le changement de $(p_0 \sigma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) = p_\mu \sigma^\mu$ en $(p_0 \sigma^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) = p_\mu \bar{\sigma}^\mu$. Dans le cas des termes non-diagonaux, par exemple,

$$\langle 0 | T \xi^\alpha(x^0, \vec{x}) (\xi^\beta)^\dagger(-x^0, -\vec{x}) | 0 \rangle = \langle 0 | T \eta_{\dot{\alpha}}(x^0, -\vec{x}) (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x^0, \vec{x}) | 0 \rangle \quad (9.30)$$

implique $\alpha(p^2) p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu = \beta(p^2) p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu$, d'où $\alpha(p^2) = \beta(p^2)$ (la même relation étant obtenue par l'autre terme). Les termes diagonaux ne donnent pas, quand à eux, de contraintes supplémentaires (les relations qu'ils font apparaître étant déjà incluses dans les contraintes internes du propagateur invariant sous \mathcal{PCT}).

Nous obtenons donc finalement le propagateur suivant :

$$S_P(p) = \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ b(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu & \left(\begin{array}{cc} \rho(p^2) & m(p^2) \\ m(p^2) & \sigma(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \left(\begin{array}{cc} \sigma(p^2) & m(p^2) \\ m(p^2) & \rho(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & b(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu \end{array} \right). \quad (9.31)$$

9.5 Contraintes données par \mathcal{CP}

L'existence de la symétrie \mathcal{CP} se traduit par les relations suivantes entre les éléments du propagateur :

$$\langle 0 | \psi(x^0, \vec{x}) \chi(y^0, \vec{y}) | 0 \rangle = \langle 0 | (\psi)^{CP}(x^0, -\vec{x}) (\chi)^{CP}(y^0, -\vec{y}) | 0 \rangle. \quad (9.32)$$

Cela entraîne pour les termes de masse les relations $m_{L1}(p^2) = m_{L2}(p^2)$, $m_{R1}(p^2) = m_{R2}(p^2)$ et $m_1(p^2) = m_2(p^2)$, ainsi que pour les termes cinétiques $a(p^2) = b(p^2)$ (les autres relations s'identifiant encore une fois aux contraintes internes déjà implémentées).

Le propagateur invariant sous la symétrie \mathcal{CP} adopte par conséquent la forme suivante :

$$S_{CP}(p) = \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \beta(p^2) \end{array} \right) p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu & \left(\begin{array}{cc} m_L(p^2) & m(p^2) \\ m(p^2) & m_R(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \left(\begin{array}{cc} m_L(p^2) & m(p^2) \\ m(p^2) & m_R(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \beta(p^2) \end{array} \right) p_\mu \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu \end{array} \right). \quad (9.33)$$

9.6 Diagonalisation du propagateur invariant sous \mathcal{C}

Comme nous l'avons montré, la présence de la symétrie \mathcal{C} contraint la forme du propagateur :

$$S_C(p) = \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu & \left(\begin{array}{cc} \rho_1(p^2) & m_1(p^2) \\ m_1(p^2) & \rho_1(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \left(\begin{array}{cc} \rho_2(p^2) & m_2(p^2) \\ m_2(p^2) & \rho_2(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu \end{array} \right). \quad (9.34)$$

Ce dernier apparaît constitué de trois matrices du même type (symétriques à éléments diagonaux égaux) $\begin{pmatrix} \alpha & a \\ a & \alpha \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \rho_1 & m_1 \\ m_1 & \rho_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \rho_2 & m_2 \\ m_2 & \rho_2 \end{pmatrix}$, qui sont toutes diagonalisées par la matrice

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.35)$$

selon le modèle

$$U^T \begin{pmatrix} \alpha & a \\ a & \alpha \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} \alpha + a & 0 \\ 0 & \alpha - a \end{pmatrix}. \quad (9.36)$$

En écrivant notre base initiale comme

$$|n_R\rangle = \begin{pmatrix} |\xi^\alpha\rangle \\ |(\xi^\beta)^c\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} |\xi^\alpha\rangle \\ |-i(\eta^{\dot{\beta}})^\dagger\rangle \end{pmatrix}, \quad |n_L\rangle = \begin{pmatrix} |(\eta_{\dot{\alpha}})^c\rangle \\ |\eta_{\dot{\beta}}\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} |-i(\xi_\alpha)^\dagger\rangle \\ |\eta_{\dot{\beta}}\rangle \end{pmatrix}, \quad (9.37)$$

nous pouvons définir la nouvelle base de diagonalisation comme

$$|N_L\rangle = U^T |n_L\rangle, \quad |N_R\rangle = U^T |n_R\rangle, \quad (9.38)$$

$$\langle N_L| = \langle n_L|U, \quad \langle N_R| = \langle n_R|U, \quad (9.39)$$

c'est à dire, de manière explicite

$$\begin{aligned} |N_R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\xi^\alpha - i(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger\rangle \\ |- \xi^\alpha - i(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\xi^\alpha + (\xi^\alpha)^c\rangle \\ |- \xi^\alpha + (\xi^\alpha)^c\rangle \end{pmatrix}, \\ |N_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |-i(\xi_\alpha)^\dagger + \eta_{\dot{\alpha}}\rangle \\ |+i(\xi_\alpha)^\dagger + \eta_{\dot{\alpha}}\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |\eta_{\dot{\alpha}} + (\eta_{\dot{\alpha}})^c\rangle \\ |\eta_{\dot{\alpha}} - (\eta_{\dot{\alpha}})^c\rangle \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9.40)$$

qui peut s'exprimer de manière condensée, au moyen de deux spineurs de Weyl χ et ω , comme

$$|N_L\rangle = \begin{pmatrix} |\chi^\alpha\rangle \\ |(-i)(\omega^{\dot{\beta}})^\dagger\rangle \end{pmatrix}, \quad |N_R\rangle = \begin{pmatrix} |(-i)(\chi_\alpha)^\dagger\rangle \\ |\omega_{\dot{\beta}}\rangle \end{pmatrix}. \quad (9.41)$$

Le propagateur prend dans cette nouvelle base la forme diagonale suivante :

$$S_C^{\text{diag}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} \alpha(p^2) + a(p^2) & \\ & \alpha(p^2) - a(p^2) \end{pmatrix} p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu & \begin{pmatrix} \rho_1(p^2) + m_1(p^2) & \\ & \rho_1(p^2) - m_1(p^2) \end{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \begin{pmatrix} \rho_2(p^2) + m_2(p^2) & \\ & \rho_2(p^2) - m_2(p^2) \end{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & \begin{pmatrix} \alpha(p^2) + a(p^2) & \\ & \alpha(p^2) - a(p^2) \end{pmatrix} p_\mu \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu \end{array} \right). \quad (9.42)$$

Ses éléments peuvent s'écrire de la manière suivante :

– Pour les termes cinétiques :

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \chi^\alpha(x) (\chi^\beta)^\dagger(-x) | 0 \rangle &= (\alpha(p^2) + a(p^2)) p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu, \\ \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T (\chi_\alpha)^\dagger(x) \chi_\beta(-x) | 0 \rangle &= (\alpha(p^2) + a(p^2)) p_\mu \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu, \\ \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T (\omega^{\dot{\alpha}})^\dagger(x) \omega^{\dot{\beta}}(-x) | 0 \rangle &= (\alpha(p^2) - a(p^2)) p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu, \\ \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \omega_{\dot{\alpha}}(x) (\omega_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 \rangle &= (\alpha(p^2) - a(p^2)) p_\mu \bar{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu. \end{aligned} \quad (9.43)$$

– Pour les termes de masse :

$$\begin{aligned}
\int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \chi^\alpha(x) i \chi_\beta(-x) | 0 \rangle &= \delta_{\alpha\beta} (\rho_1(p^2) + m_1(p^2)), \\
\int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T(-i)(\chi_\alpha)^\dagger(x) (\chi^\beta)^\dagger(-x) | 0 \rangle &= \delta_{\alpha\beta} (\rho_2(p^2) + m_2(p^2)), \\
\int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T(-i)(\omega^{\dot{\alpha}})^\dagger(x) (\omega_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 \rangle &= \delta_{\alpha\beta} (\rho_1(p^2) - m_1(p^2)), \\
\int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \omega_{\dot{\alpha}}(x) i \omega^{\dot{\beta}}(-x) | 0 \rangle &= \delta_{\alpha\beta} (\rho_2(p^2) - m_2(p^2)). \quad (9.44)
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors définir deux spineurs de Majorana à partir des spineurs de Weyl χ et ω introduits en (9.41) :

$$\begin{aligned}
X_M^\pm &= \begin{pmatrix} \chi^\alpha \\ \pm(-i)(\chi_\alpha)^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi^\alpha + (\xi^\alpha)^c \\ \pm(\eta_{\dot{\alpha}} + (\eta_{\dot{\alpha}})^c) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi^\alpha - i(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger \\ \pm(\eta_{\dot{\alpha}} - i(\xi_\alpha)^\dagger) \end{pmatrix}, \\
\Omega_M^\pm &= \begin{pmatrix} \pm(-i)(\omega^{\dot{\beta}})^\dagger \\ \omega_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm(-\xi^\beta + (\xi^\beta)^c) \\ \eta_{\dot{\beta}} - (\eta_{\dot{\beta}})^c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm(-\xi^\beta - i(\eta^{\dot{\beta}})^\dagger) \\ \eta_{\dot{\beta}} + i(\xi_\beta)^\dagger \end{pmatrix}. \quad (9.45)
\end{aligned}$$

qui vérifient les relations

$$\begin{aligned}
\int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T X_{M\alpha}^\pm(x) \overline{X_{M\beta}^\pm}(-x) | 0 \rangle &= \\
&\begin{pmatrix} (\rho_1(p^2) + m_1(p^2))\delta_{\alpha\beta} & (\alpha(p^2) + a(p^2))p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \\ (\alpha(p^2) + a(p^2))p_\mu \overline{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu & (\rho_2(p^2) + m_2(p^2))\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \quad (9.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \Omega_{M\alpha}^\pm(x) \overline{\Omega_{M\beta}^\pm}(-x) | 0 \rangle &= \\
&\begin{pmatrix} (\rho_1(p^2) - m_1(p^2))\delta_{\alpha\beta} & (\alpha(p^2) - a(p^2))p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \\ (\alpha(p^2) - a(p^2))p_\mu \overline{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu & (\rho_2(p^2) - m_2(p^2))\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \quad (9.47)
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque la conjugaison de charge \mathcal{C} est une symétrie du système, le propagateur fermionique le plus général (invariant par construction sous \mathcal{PCT}) est équivalent à deux propagateurs de spineurs de Majorana.

On peut montrer facilement que le déterminant de $S_{\mathcal{C}}(p)$, égal à celui de $S_{\mathcal{C}}^{\text{diag}}(p)$, peut s'écrire comme le produit des déterminants des deux matrices du membre de droite de (9.47). Les pôles de $S_{\mathcal{C}}(p)$, qui déterminent les masses physiques des particules qui se propagent, s'identifient donc aux pôles des propagateurs de Majorana de (9.47). En conclusion, les états physiques du propagateur invariant sous \mathcal{C} sont les deux fermions de Majorana X et Ω .

Conclusion

Nous avons présenté, dans la seconde partie de cette thèse, les premiers pas vers une approche propagatorielle des fermions couplés en Théorie Quantique des Champs. Une part non négligeable de ce travail a en fait été consacrée à la constitution, en amont, d'une synthèse cohérente sur les champs fermioniques et leurs transformations sous les différentes symétries discrètes, mettant clairement en évidence certaines particularités souvent peu soulignées dans la littérature (par exemple la distinction entre chiralité et hélicité). Puis, ayant ainsi solidement établi les bases de notre étude subséquente, nous avons déterminé les contraintes engendrées par les symétries discrètes sur le Lagrangien et surtout le propagateur fermioniques les plus généraux invariants sous PCT . A la suite de cela nous avons montré que les états propres du propagateur invariant sous \mathcal{C} étaient des fermions de Majorana.

Ce résultat, qui a été établi dans le cas très restreint d'un fermion unique couplé avec son antiparticule, est de portée encore très limitée du point de vue de sa signification physique. Il ne s'agit là que d'un premier pas appelant une extension au cas général de plusieurs saveurs correspondant à la réalité physique. Cette extension permettrait à terme de proposer un traitement de la question cruciale du mélange des fermions, en lien avec les symétries discrètes, dans le cadre de l'approche propagatorielle rigoureuse de la Théorie Quantique des Champs.

Bibliographie

- [1] S. Weinberg, “The Quantum theory of fields. Vol. 1 : Foundations,” *Cambridge, UK : Univ. Pr. (1995) 609 p.*
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction To Quantum Field Theory,” *Reading, USA : Addison-Wesley (1995) 842 p.*
- [3] T. P. Cheng and L. F. Li, “Gauge Theory Of Elementary Particle Physics,” *Oxford, Uk : Clarendon (1984) 536 p. (Oxford Science Publications)*
- [4] B. Machet, V. A. Novikov and M. I. Vysotsky, “Binary systems of neutral mesons in quantum field theory,” *Int. J. Mod. Phys. A* **20** (2005) 5399 [arXiv :hep-ph/0407268].
- [5] S. Weinberg, “The Problem Of Mass,” *Trans. New York Acad. Sci.* **38** (1977) 185.
- [6] P. F. Harrison, D. H. Perkins and W. G. Scott, “Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data,” *Phys. Lett. B* **530** (2002) 167 [arXiv :hep-ph/0202074].
- [7] A. Y. Smirnov, “Neutrino masses and mixing : Leptons versus quarks,” arXiv :hep-ph/0604213.
- [8] E. Ma, “Lepton family symmetry and the neutrino mixing matrix,” *J. Phys. Conf. Ser.* **53** (2006) 451 [arXiv :hep-ph/0606024].
- [9] G. Altarelli, “Models of neutrino masses and mixings : A progress report,” arXiv :0705.0860 [hep-ph].
- [10] G. Altarelli and F. Feruglio, “Tri-bimaximal neutrino mixing from discrete symmetry in extra Nucl. Phys. B” **720** (2005) 64 [arXiv :hep-ph/0504165].
- [11] V. A. Novikov, “Binary systems in QM and in QFT : CPT,” arXiv :hep-ph/0509126.
- [12] C. Jarlskog, “Ambiguities pertaining to quark-lepton complementarity,” *Phys. Lett. B* **625** (2005) 63 [arXiv :hep-ph/0507212].
C. Jarlskog, “The role of invariant functions in understanding masses and mixings,” *Phys. Scripta* **T127** (2006) 64 [arXiv :hep-ph/0606050].
- [13] N. Cabibbo, “Unitary Symmetry and Leptonic Decays,” *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 531.
- [14] M. Kobayashi and T. Maskawa, “CP Violation In The Renormalizable Theory Of Weak Interaction,” *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.
- [15] M. C. Gonzalez-Garcia and M. Maltoni, “Phenomenology with Massive Neutrinos,” *Phys. Rept.* **460** (2008) 1 [arXiv :0704.1800 [hep-ph]].
- [16] B. Pontecorvo, “Neutrino experiments and the question of leptonic-charge conservation,” *Sov. Phys. JETP* **26** (1968) 984 [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **53** (1967) 1717].
- [17] Z. Maki, M. Nakagawa and S. Sakata, “Remarks on the unified model of elementary particles,” *Prog. Theor. Phys.* **28** (1962) 870.

- [18] C. Giunti, “Neutrino flavour states and the quantum theory of neutrino oscillations,” J. Phys. G **34** (2007) R93 [arXiv :hep-ph/0608070].
- [19] C. Giunti and C. W. Kim, “Quantum mechanics of neutrino oscillations,” Found. Phys. Lett. **14** (2001) 213 [arXiv :hep-ph/0011074].
- [20] E. K. Akhmedov, “Do charged leptons oscillate?,” JHEP **0709** (2007) 116 [arXiv :0706.1216 [hep-ph]].
- [21] B. Kayser, “On The Quantum Mechanics Of Neutrino Oscillation,” Phys. Rev. D **24** (1981) 110.
- [22] M. Beuthe, “Oscillations of neutrinos and mesons in quantum field theory,” Phys. Rept. **375** (2003) 105 [arXiv :hep-ph/0109119].
- [23] S. Antusch, C. Biggio, E. Fernandez-Martinez, M. B. Gavela and J. Lopez-Pavon, “Unitarity of the Leptonic Mixing Matrix,” JHEP **0610** (2006) 084 [arXiv :hep-ph/0607020].
- [24] E. Fernandez-Martinez, M. B. Gavela, J. Lopez-Pavon and O. Yasuda, “CP-violation from non-unitary leptonic mixing,” Phys. Lett. B **649** (2007) 427 [arXiv :hep-ph/0703098].
- [25] M. Blasone and G. Vitiello, “Quantum field theory of fermion mixing,” Annals Phys. **244** (1995) 283 [Erratum-ibid. **249** (1996) 363] [arXiv :hep-ph/9501263].
M. Blasone, A. Capolupo, C. R. Ji and G. Vitiello, “Flavor charges and flavor states of mixed neutrinos,” arXiv :hep-ph/0611106.
A. Capolupo, “Aspects of particle mixing in quantum field theory,” arXiv :hep-th/0408228.
- [26] K. Fujii, C. Habe and T. Yabuki, “Note on the field theory of neutrino mixing,” Phys. Rev. D **59** (1999) 113003 [Erratum-ibid. D **60** (1999) 099903] [arXiv :hep-ph/9807266].
- [27] C. R. Ji and Y. Mishchenko, “The general theory of quantum field mixing,” Phys. Rev. D **65** (2002) 096015 [arXiv :hep-ph/0201188].
- [28] C. Giunti, “Fock states of flavor neutrinos are unphysical,” Eur. Phys. J. C **39** (2005) 377 [arXiv :hep-ph/0312256].
- [29] W. M. Yao *et al.* [Particle Data Group], “Review of particle physics,” J. Phys. G **33** (2006) 1.
- [30] G. Lopez Castro and J. Pestieau, “Arithmetic and the standard electroweak theory,” arXiv :hep-ph/9804272.
G. Lopez Castro and J. Pestieau, “The unit of electric charge and the mass hierarchy of heavy particles,” Mod. Phys. Lett. A **22** (2007) 2909 [arXiv :hep-ph/0609131].
- [31] H. Minakata and A. Y. Smirnov, “Neutrino mixing and quark lepton complementarity,” Phys. Rev. D **70** (2004) 073009 [arXiv :hep-ph/0405088].
H. Minakata, “Quark-lepton complementarity : A review,” arXiv :hep-ph/0505262.
- [32] M. Raidal, “Prediction $\Theta(C) + \Theta(sol) = \pi/4$ from flavor physics : A new evidence for grand unification?,” Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 161801 [arXiv :hep-ph/0404046].
- [33] S. Antusch, S. F. King and R. N. Mohapatra, “Quark lepton complementarity in unified theories,” Phys. Lett. B **618** (2005) 150 [arXiv :hep-ph/0504007].

- [34] E. P. Shabalin, "Electric Dipole Moment Of Quark In A Gauge Theory With Left-Handed Currents," Sov. J. Nucl. Phys. **28** (1978) 75 [Yad. Fiz. **28** (1978) 151].
- [35] L. Wolfenstein, "Oscillations Among Three Neutrino Types And CP Violation," Phys. Rev. D **18** (1978) 958.
- [36] F. Caravaglios and S. Morisi, "Neutrino masses and mixings with an $S(3)$ family permutation symmetry," arXiv :hep-ph/0503234.
- [37] R. N. Mohapatra, S. Nasri and H. B. Yu, " $S(3)$ symmetry and tri-bimaximal mixing," Phys. Lett. B **639** (2006) 318 [arXiv :hep-ph/0605020].
- [38] C. Y. Chen and L. Wolfenstein, "Consequences of Approximate S_3 Symmetry of the Neutrino Mass Matrix," Phys. Rev. D **77** (2008) 093009 [arXiv :0709.3767 [hep-ph]].
- [39] Y. Kajiyama, M. Raidal and A. Strumia, "The golden ratio prediction for the solar neutrino mixing," Phys. Rev. D **76** (2007) 117301 [arXiv :0705.4559 [hep-ph]].
- [40] F. Gonzalez Canales and A. Mondragon, "On quark-lepton complementarity," AIP Conf. Proc. **857** (2006) 287 [arXiv :hep-ph/0606175].
- [41] N. N. Bogolyubov, A. A. Logunov, A. I. Oksak and I. T. Todorov, "General principles of quantum field theory," *Dordrecht, Netherlands : Kluwer (1990) 694 p. (Mathematical physics and applied mathematics, 10)*
- [42] V. Berestetski, E. Lifshitz, L. Pitayevski, "Théorie Quantique Relativiste" tome 1 (Landau & Lifshitz, Physique Théorique IV) *Mir (Moscou, 1972)*.
V. b. Berestetsky, E. m. Lifshitz and L. p. Pitaevsky, "Quantum Electrodynamics," *Oxford, Uk : Pergamon (1982) 652 P. (Course Of Theoretical Physics, 4)*
- [43] C. Itzykson and J. B. Zuber, "Quantum Field Theory," *New York, Usa : Mcgraw-hill (1980) 705 p. (International Series In Pure and Applied Physics)*
- [44] R. F. Streater and A. S. Wightman, "PCT, spin and statistics, and all that," *Redwood City, USA : Addison-Wesley (1989) 207 p. (Advanced book classics)*
- [45] O. W. Greenberg, "Why is CPT fundamental?," Found. Phys. **36** (2006) 1535 [arXiv :hep-ph/0309309].
- [46] J. S. Schwinger, "The theory of quantized fields. I," Phys. Rev. **82** (1951) 914.
- [47] W. Pauli, "Exclusion principle, Lorentz group and reflection of space-time and charge", in "Niels Bohr and the development of physics", *Pergamon Press, London (1955)*

Annexe A

$\tilde{\theta}_{13} = 0 \Rightarrow \theta_{13} = 0$

En utilisant les notations de la section 3.2 nous partons du système d'équations suivant :

$$\frac{[11] + [22]}{2} = [33] \Leftrightarrow s_{13}^2 + s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2 = 1; \quad (\text{A.1a})$$

$$[11] = [22] \Leftrightarrow c_{13}^2 \cos(2\theta_{12}) = (c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) \cos(2\tilde{\theta}_{12}); \quad (\text{A.1b})$$

$$[12] = 0 = [21] \Leftrightarrow c_{13}^2 \sin(2\theta_{12}) = (c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) \sin(2\tilde{\theta}_{12}); \quad (\text{A.1c})$$

$$[13] = 0 = [31] \Leftrightarrow \tilde{s}_{12} \left(\sin(2\theta_{23}) - \sin(2\tilde{\theta}_{23}) \right) = c_{12} \sin(2\theta_{13}); \quad (\text{A.1d})$$

$$[23] = 0 = [32] \Leftrightarrow \tilde{c}_{12} \left(\sin(2\tilde{\theta}_{23}) - \sin(2\theta_{23}) \right) = s_{12} \sin(2\theta_{13}). \quad (\text{A.1e})$$

L'équation (A.1a) entraîne $c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2 = 1 + s_{13}^2$, d'où $c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2 \neq 0$. En reportant ce résultat dans (A.1b) et (A.1c), nous obtenons nécessairement $c_{13}^2 \neq 0$. En effet, dans le cas contraire les membres de droite des deux équations doivent être nuls également, et donc $\cos(2\tilde{\theta}_{12})$ et $\sin(2\tilde{\theta}_{12})$ doivent s'annuler simultanément, ce qui est impossible.

Fort de ce résultat préliminaire, étudions maintenant les deux équations parallèles (A.1b) et (A.1c).

- Les deux membres de (A.1b) s'annulent si et seulement si $\cos(2\theta_{12}) = 0 = \cos(2\tilde{\theta}_{12})$, c'est à dire $\theta_{12} = \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}] = \tilde{\theta}_{12}$. (A.1c) devient alors $c_{13}^2 = c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2$, qui conduit avec l'équation (A.1a) à la solution suivante¹ : $\theta_{13} = 0[\pi]$ et $\tilde{\theta}_{23} = \pm\theta_{23}[\pi]$.

- De même, les deux membres de (A.1c) s'annulent si et seulement si $\sin(2\theta_{12}) = 0 = \sin(2\tilde{\theta}_{12})$, c'est à dire $\theta_{12} = 0[\frac{\pi}{2}] = \tilde{\theta}_{12}$. (A.1b) donne alors $c_{13}^2 = c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2$, d'où comme dans le cas précédent $\theta_{13} = 0[\pi]$ et $\tilde{\theta}_{23} = \pm\theta_{23}[\pi]$.

- Dans les autres cas, les membres de (A.1b) et (A.1c) ne s'annulent pas, et l'on peut donc calculer le rapport (A.1b) / (A.1c), qui entraîne $\tan(2\theta_{12}) = \tan(2\tilde{\theta}_{12})$, d'où $\theta_{12} = \tilde{\theta}_{12}[\pi]$ ou $\theta_{12} = \frac{\pi}{2} + \tilde{\theta}_{12}[\pi]$.

- * $\theta_{12} = \frac{\pi}{2} + \tilde{\theta}_{12}[\pi]$ implique pour (A.1b) et (A.1c) la relation $c_{13}^2 = -c_{23}^2 - \tilde{s}_{23}^2$, qui associée à l'équation (A.1a) : $(c_{13}^2 = s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2)$, entraîne une contradiction : $2 = 0$.

- * $\theta_{12} = \tilde{\theta}_{12}(\neq 0)[\pi]$ implique $c_{13}^2 = c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2$, qui conduit comme précédemment, en association avec (A.1a) aux solutions suivantes : $\theta_{13} = 0[\pi]$ et $\tilde{\theta}_{23} = \pm\theta_{23}[\pi]$.

$$1 \left\{ \begin{array}{l} c_{13}^2 = c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2 \\ s_{13}^2 + s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2 = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2 = 1 \\ s_{13}^2 = 0 \end{array} \right.$$

Quel que soit le cas, les trois premières équations de notre système conduisent donc à des solutions où l'angle θ_{13} s'annule : $\theta_{13} = 0[\pi]$. Les deux angles relatifs au mélange (1, 3) apparaissent également toujours liés par la relation $\tilde{\theta}_{23} = \pm\theta_{23}[\pi]$.

Considérons maintenant les deux autres équations parallèles, (A.1d) et (A.1e), de manière à vérifier la cohérence de nos résultats. La condition $\theta_{13} = 0$ annule leurs deux membres de droite, laissant les deux équations jumelles

$$\tilde{s}_{12}(\sin(2\theta_{23}) - \sin(2\tilde{\theta}_{23})) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\tilde{c}_{12}(\sin(2\theta_{23}) - \sin(2\tilde{\theta}_{23})) = 0, \quad (\text{A.3})$$

qui impliquent ensemble la relation $\sin(2\theta_{23}) = \sin(2\tilde{\theta}_{23})$, d'où $\theta_{23} = \tilde{\theta}_{23}[\pi]$ ou $\theta_{23} = \frac{\pi}{2} - \tilde{\theta}_{23}[\pi]$.

* $\theta_{23} = \tilde{\theta}_{23}[\pi]$ s'accorde directement avec les résultats précédents dans le cas "+", tandis que dans le cas du signe "-", l'accord conduit à $\theta_{23} = \tilde{\theta}_{23} = 0$, qui peut être réabsorbé comme un cas particulier dans la configuration "+".

* $\theta_{23} = \frac{\pi}{2} - \tilde{\theta}_{23}[\pi]$ s'accorde avec nos solutions dans le cas "+" seulement (le cas "-" conduisant à un résultat absurde), et il donne lieu dans ce cas à $\theta_{23} = \tilde{\theta}_{23} = \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]$, c'est à dire au mélange maximal entre les fermions des seconde et troisième générations.

Annexe B

Solutions $(\theta_{12}, \theta_{23})$ des équations (3.37a) à (3.37e) dans le cas $\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$

Comme \tilde{c}_{12} et \tilde{s}_{12} ne peuvent pas s'annuler simultanément, les deux équations parallèles (3.37a) et (3.37b) impliquent ensemble $\sin(2\theta_{23}) = \sin(2\tilde{\theta}_{23})$, d'où $\tilde{\theta}_{23} = \theta_{23}[\pi]$ ou $\tilde{\theta}_{23} = \frac{\pi}{2} - \theta_{23}[\pi]$.

- Dans le cas où $\tilde{\theta}_{23} = \theta_{23}[\pi]$,

(3.37c) implique $\sin(2\theta_{12}) = \sin(2\tilde{\theta}_{12})$;

(3.37d) implique $\cos(2\theta_{12}) = \cos(2\tilde{\theta}_{12})$;

(3.37e) implique $s_{12}^2 + \tilde{c}_{12}^2 - 1 = 0$.

Les solutions de ces trois dernières équations sont $\theta_{12} = \tilde{\theta}_{12}[\pi]$.

- Dans le cas où $\tilde{\theta}_{23} = \frac{\pi}{2} - \theta_{23}[\pi]$,

(3.37c) implique $s_{12}c_{12} = 2c_{23}^2\tilde{s}_{12}\tilde{c}_{12}$, d'où $\sin(2\theta_{12}) = 2c_{23}^2\sin(2\tilde{\theta}_{12})$;

(3.37d) implique $c_{12}^2 - s_{12}^2 = 2c_{23}^2(\tilde{c}_{12}^2 - \tilde{s}_{12}^2)$, d'où $\cos(2\theta_{12}) = 2c_{23}^2\cos(2\tilde{\theta}_{12})$.

En supposant $\cos(2\theta_{12}) \neq 0 \neq \cos(2\tilde{\theta}_{12})$, c'est à dire $\theta_{12} \neq \frac{\pi}{2}[\frac{\pi}{4}] \neq \tilde{\theta}_{12}$, nous pouvons effectuer le rapport des deux premières relations, qui conduit à $\tan(2\theta_{12}) = \tan(2\tilde{\theta}_{12})$, d'où $\tilde{\theta}_{12} = \theta_{12} + \frac{\pi}{2}[\pi]$ ou $\tilde{\theta}_{12} = \theta_{12}[\pi]$. Réintroduite dans l'une des deux équations du rapport, la première solution conduit à $2c_{23}^2 = -1$, et se trouve de ce fait éliminée. La deuxième conduit à $2c_{23}^2 = 1$, d'où l'on tire la solution $\theta_{23} = \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]$. L'angle $\tilde{\theta}_{23}$ est alors également maximal : $\tilde{\theta}_{23} = \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]$, tout en étant toujours lié à θ_{23} par la relation $\tilde{\theta}_{23} = \frac{\pi}{2} - \theta_{23}[\pi]$. La dernière équation, (3.37e), se trouve de la sorte automatiquement satisfaite.

En conclusion, nous obtenons deux types de solutions :

- $\tilde{\theta}_{12} = \theta_{12}[\pi]$ et $\tilde{\theta}_{23} = \theta_{23}[\pi]$ de type standard.
- $\tilde{\theta}_{12} = \theta_{12}[\pi]$ et les deux angles θ_{23} et $\tilde{\theta}_{23}$ de type maximal, liés par la relation $\tilde{\theta}_{23} = \frac{\pi}{2} - \theta_{23}[\pi]$.

En tenant compte de l'intervalle physique $[0, \frac{\pi}{2}]$, les solutions précédentes se réduisent à

- $\tilde{\theta}_{12} = \theta_{12}$ et $\tilde{\theta}_{23} = \theta_{23}$.
- $\tilde{\theta}_{12} = \theta_{12}$ et $\tilde{\theta}_{23} = \frac{\pi}{4} = \theta_{23}$.

Annexe C

Courants chargés et "base de saveur renormalisée"

Il est possible de réécrire l'équation (5.41) du chapitre 4, exprimant le courant chargé $\bar{\xi}_{uL} \mathfrak{C} \gamma^\mu \xi_{dL}$ dans la base des états propres de saveur au premier ordre dans les paramètres A_u et A_d , de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{uL} \mathfrak{C} \gamma^\mu \xi_{dL} &= \begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} [1 + A_u T_z(\theta_u) + A_d T_z(\theta_d)] \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} [(1 + A_u T_z(\theta_u))(1 + A_d T_z(\theta_d))] \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \\ &\approx \overline{e^{A_u T_z(\theta_u)} \begin{pmatrix} u_{fL} \\ c_{fL} \end{pmatrix}} e^{A_d T_z(\theta_d)} \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (C.1)$$

Le courant chargé peut donc s'écrire simplement

$$\bar{\xi}_{uL} \mathfrak{C} \gamma^\mu \xi_{dL} = \bar{f}_{uL} \gamma^\mu f_{dL}. \quad (C.2)$$

dans une base définie de manière effective à partir de la base de saveur :

$$f_{uL} = e^{A_u T_z(\theta_u)} \begin{pmatrix} u_{fL} \\ c_{fL} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_{dL} = e^{A_d T_z(\theta_d)} \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}. \quad (C.3)$$

Les matrices de mélange $\mathfrak{C}_{u/d}$ reliant cette "base de saveur renormalisée" à la base des états propres de masse renormalisés ξ vérifient (en notant $\alpha = u, d$)

$$\mathfrak{C}_\alpha = e^{A_\alpha T_z(\theta_\alpha)} \mathcal{C}_\alpha \approx (1 - A_\alpha T_z(\theta_\alpha)) \mathcal{C}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\theta_\alpha + \frac{A_\alpha}{2}) & -\sin(\theta_\alpha + \frac{A_\alpha}{2}) \\ \sin(\theta_\alpha + \frac{A_\alpha}{2}) & \cos(\theta_\alpha + \frac{A_\alpha}{2}) \end{pmatrix}, \quad (C.4)$$

et sont donc unitaires. Le seul effet des contre-terms finis de Shabalin est une renormalisation finie de leurs angles de mélange. De plus, elles vérifient la relation standard

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_u^\dagger \mathfrak{C}_d, \quad (C.5)$$

où \mathfrak{C} est la matrice de Cabibbo renormalisée calculée en (4.42) comme une matrice de rotation d'angle $\tilde{\theta}_c = \theta_{uL} - \theta_{dL} + \frac{1}{2}(A_u - A_d)$.

La "base de saveur renormalisée" (C.3) nous permet donc de retrouver des matrices de mélange unitaires et un Lagrangien formellement identique au Lagrangien "nu" du modèle standard.

Annexe D

Articles

D.1 Mixing angles of quarks and leptons in quantum field theory

Q. Duret, B. Machet and M. I. Vysotsky,
arXiv :0805.4121 [hep-ph],
soumis pour publication à Int. J. Mod. Phys. A.

MIXING ANGLES OF QUARKS AND LEPTONS IN QUANTUM FIELD THEORY

Q. Duret^{1 2}, B. Machet^{1 3} & M.I. Vysotsky^{4 5}

Abstract: Previous arguments coming from general quantum field theory are supplemented with a perturbative calculation according to E.P. Shabalin to settle the non-unitarity of mixing matrices connecting renormalized mass eigenstates to (bare) flavor states for non-degenerate coupled systems of particles. $SU(2)_L$ gauge invariance nevertheless constrains the mixing matrix occurring in charged currents of renormalized mass states to stay unitary. Mixing angles connecting the renormalized (non-orthonormal) mass and flavor bases get renormalized with respect to their “bare” values by the finite kinetic counterterms of Shabalin. Leaving aside CP violation, we observe that mixing angles exhibit, within experimental uncertainty, a simple breaking pattern of $SU(2)_f$ horizontal symmetry linked to the algebra of weak neutral currents. It concerns: on one hand, the three quark mixing angles; on the other hand, a neutrino-like pattern in which θ_{23} is maximal and $\tan(2\theta_{12}) = 2$. The Cabibbo angle fulfills the condition $\tan(2\theta_c) = 1/2$ and θ_{12} for neutrinos satisfies accordingly the “quark-lepton complementarity condition” $\theta_c + \theta_{12} = \pi/4$. Among all solutions, two values for the third neutrino mixing angle arise such that $\sin^2(\theta_{13}) \leq 0.1$: $\theta_{13} = \pm 5.7 \cdot 10^{-3}$ and $\theta_{13} = \pm 0.2717$. Flavor symmetries, their breaking by a non-degenerate mass spectrum, and their entanglement with the gauge symmetry, are scrutinized; the special role of flavor rotations as a very mildly broken symmetry of the Standard Model is outlined.

PACS: 11.30.Hv , 11.40.-q , 12.15.Ff , 12.15.Hh , 12.15.Mm, 14.60.Pq

¹LPTHE tour 24-25, 5^{ème} étage, UPMC Univ Paris 06, BP 126, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05 (France),
Unité Mixte de Recherche UMR 7589 (CNRS / UPMC Univ Paris 06)

²E-mail: duret@lpthe.jussieu.fr

³E-mail: machet@lpthe.jussieu.fr

⁴SSC RF ITEP, lab. 180, Bolshaya Cheremushkinskaya Ul. 25, 117218 Moscow (Russia)

⁵E-mail: vysotsky@itep.ru

1 Introduction

In the Standard Model of electroweak interactions [1], universality (we think in particular of gauge neutral currents) is very well verified for mass states, which are the observed and propagating states; non-diagonal transitions (for example $d_m \leftrightarrow s_m$ transitions – see Fig.1 –) as well as non-diagonal neutral currents and small violations of universality are generated at 1-loop via charged weak currents and the Cabibbo mixing. This empirical fact is consistent with the gauge Lagrangian for neutral currents being controlled, in mass space, by the unit matrix (this will be justified later on more precise grounds). This work, motivated by results of [2] and [3], which are summarized below, rests on the fact that, in Quantum Field Theory (QFT), for non-degenerate coupled systems like fermions, the unit matrix controlling neutral currents in mass space does not translate *a priori* unchanged when one goes from mass states to flavor states. By analyzing this transition, we uncover peculiar and regular structures related to flavor transformations and symmetries; they arise in gauge neutral currents, instead of mass matrices where they are more commonly looked for.

We have shown in [2] that, in Quantum Field Theory (QFT), mixing matrices linking (bare) flavor to (renormalized) mass eigenstates for non-degenerate coupled systems should never be parametrized as unitary. Indeed, assuming that the renormalized (q^2 dependent, effective) quadratic Lagrangian is hermitian at any q^2 , different mass eigenstates, which correspond to different values of q^2 (poles of the renormalized propagator), belong in general to different orthonormal bases^{1 2}; this is the main property pervading the present work. We recover this result in section 2 from perturbative arguments, through the introduction of the finite counterterms canceling, at 1-loop, on mass-shell $d_m \leftrightarrow s_m$ transitions and equivalent [4].

When it is so, the properties of universality for diagonal neutral currents and absence of flavor changing neutral currents (FCNC's) do not anymore automatically translate from the space of mass states to the one of flavor eigenstates (and *vice versa*). Assuming these two properties for mass states, they can only be achieved for flavor states in two cases^{3 4}: “Cabibbo-like” solutions (the standard case)⁵ which reduce to a single unconstrained mixing angle, and a set of new, discrete solutions, unnoticed in the customary approach, including in particular the so-called maximal mixing $\pi/4 \pm k\pi/2$;

While, for any of these solutions one recovers a unitary mixing matrix, the very small departure from unitarity expected in principle because of mass splittings manifests itself as tiny violations of the two previous conditions: universality gets slightly violated and FCNC's arise. We empirically found [3] that these violations obey a very precise pattern: in the *neighborhood* of a Cabibbo-like solution, they become of equal strength for a mixing angle extremely close to its measured value

$$\tan(2\theta_c) = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

This success was an encouragement to go further in this direction. We present below the outcome of our investigation in the case of three generations of fermions. The intricate system of trigonometric equations has been analytically solved by successive approximations, starting from configurations in which θ_{13} is vanishing. We will see that this approximation, obviously inspired by the patterns of mixing angles determined from experimental measurements, turns out to be a very good one. Indeed, we show, without exhibiting all the solutions of our equations, that the presently observed patterns of quarks as well as of neutrinos, do fulfill our criterion with a precision smaller than experimental uncertainty.. While the

¹Since, at any *given* q^2 , the set of eigenstates of the renormalized quadratic Lagrangian form an orthonormal basis, the mixing matrix with all its elements evaluated at this q^2 is unitary and the unitarity of the theory is never jeopardized.

²Special cases can occur, in which two coupled states with different masses can be orthogonal: this would be the case of neutral kaons in a world where they are stable and where CP symmetry is not violated; the mass eigenstates are then the orthogonal K_1^0 and K_2^0 mesons [7].

³With respect to [2] and [3], the roles of flavor and mass eigenstates have to be swapped. This is shown in particular by perturbative calculations (see section 2 below. See also eqs.(54a),(54b), and footnote 15.

⁴For two generations, one is led to introduce two mixing angles to parametrize each 2×2 non-unitary mixing matrix.

⁵Cabibbo-like angles can only be fixed by imposing conditions on the *violation pattern* of the unitarity of the mixing matrix in its vicinity.

three angles of the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) solution are “Cabibbo-like”, the neutrino-like solution

$$\begin{aligned}\tan(2\theta_{12}) &= 2 \Leftrightarrow \theta_{12} \approx 31.7^\circ, \\ \theta_{23} &= \pi/4, \\ \theta_{13} &= \pm 5.7 \cdot 10^{-3} \text{ or } \theta_{13} = \pm 0.2717\end{aligned}\tag{2}$$

is of a mixed type, where θ_{23} is maximal while θ_{12} and θ_{13} are Cabibbo-like.

Two significant features in these results must be stressed. First, the values for the third neutrino mixing angle θ_{13} given in (2) are the only ones which lie within present (loose) experimental bounds. Only two possibilities survive: an extremely small value $\theta_{13} \sim V_{ub} \sim \text{a few } 10^{-3}$, and a rather “large” one, at the opposite side of the allowed range (it actually lies slightly beyond present experimental upper limit). Secondly, our procedure yields in an exact, though quite simple way, the well-known “quark-lepton complementarity relation” [8] for 1-2 mixing:

$$\theta_{12} + \theta_c = \pi/4,\tag{3}$$

where θ_{12} is the leptonic angle, and θ_c the Cabibbo angle for quarks.

The phenomenological results for the mixing angles obtained in this work only rely on a specific pattern of neutral currents in bare flavor space, and do not depend of the size of the parameter characterizing the departure of the mixing matrix from unitarity (*i.e.*, in practice, the value of the finite counterterms [4]).

The latter, that need to be introduced to cancel unwanted non-diagonal transitions, modify kinetic and mass terms of fermions. It turns out that the diagonalization of the new quadratic Lagrangian obtained from the classical one by the adjunction of these counterterms requires non-unitary mixing matrices similar to the ones used in [2][3] to connect renormalized mass eigenstates to bare flavor eigenstates. Nevertheless, we show, and the $SU(2)_L$ gauge symmetry plays a crucial role for this, that the mixing matrix occurring in charged currents of renormalized mass states, for example the Cabibbo matrix, stays unitary. In this (non-orthonormal) basis, the $SU(2)_L$ gauge algebra closes on the unit matrix which controls neutral currents (like it did in the orthonormal basis of bare mass eigenstates). Mixing angles simply undergo a finite renormalization by half Shabalin’s kinetic counterterms. By introducing a non-unitary renormalization of flavor states, one can also make unitary the mixing matrices which connect, in each sector, the renormalized flavor states to renormalized mass states; the former do not form anymore, however, an orthonormal basis.

The above results have been obtained, so far, without connection to horizontal symmetries; they only rely on the generalization to three generations of the empirical property concerning gauge neutral currents in flavor space, that we uncovered in [2][3] for two generations of quarks. This constitutes a departure from customary approaches, which rather try to induce some specific form for mass matrices from suitably guessed horizontal symmetries [6]. So, the last part of this work starts spanning a bridge between gauge currents and mass matrices, investigate which role eventually play flavor symmetries, and how they are realized in nature. For the sake of simplicity, we do this in the case of two generations only. A natural horizontal group arises, which is $SU(2)_f \times U(1)_f$ (or $U(2)_f$); both non-trivial parts of gauge neutral currents and of the fermion mass matrix (that we suppose to be real symmetric) respectively exhibit the $SU(2)_f$ generators \mathcal{T}_z and \mathcal{T}_x . This flavor group is a rotated version of the most trivial one (the generators of which are the Pauli matrices); its orientation depends on the mixing angle θ . It is unbroken in the case of mass degeneracy (and the mixing angle is then arbitrary); mass splittings alter this situation, and one can then find two subgroups leaving respectively invariant the gauge Lagrangian of neutral currents, or the fermionic mass terms (but not both). Mixing angles, associated, as we saw, to specific departure from unity of the matrix controlling neutral currents in flavor space, are accordingly also related to a specific pattern of the *breaking* of the $SU(2)_f$ flavor symmetry under consideration. We show that the transformations generated by the (θ independent) generator \mathcal{T}_y , which correspond to 2-dimensional flavor rotations, continuously transform the matrix controlling gauge neutral currents into the mass matrix.

Since introducing a unique constant mass matrix is known to be problematic in QFT when dealing with coupled systems [9]), we generalize this connection, through Ward identities, to the renormalized

fermionic self-energy. The latter gets thus related to neutral currents, such that their flavor group structure is stable by flavor rotations, unlike textures.

Another important aspect of unitary flavor transformations is that, though they may not be symmetries of the theory (in the sense that its Lagrangian is not invariant), they should not change the “physics”, in particular the Cabibbo angle occurring in charged gauge currents. We show that it is indeed the case, including its renormalization through the finite counterterms of Shabalin. Among these unitary transformations, flavor rotations turn out again to be of special interest. While they do not alter the breaking pattern (flavor group structure) of neutral currents in each sector $((u, c)$ and $(d, s))$, it is in general not the case for charged currents unless the rotations in the two sectors are identical. When it is so, only one of the two mixing angles (the one of (u, c) or the one of (d, s)) can be turned to zero, such that the one in the other sector becomes, as commonly assumed, equal to the Cabibbo angle. We also show that one can choose a renormalization scheme in which, including 1-loop corrections and Shabalin’s counterterms, the gauge charged current, after mass/flavor alignment in the (u, c) sector through a flavor rotation, only depends, as expected, on the (renormalized) Cabibbo angle. Flavor rotations appear as a very mildly broken symmetry of the Standard Model, in the sense that they only alter the Lagrangian through unphysical phase shifts and do not modify the “physics” (the Cabibbo mixing angle or its leptonic equivalent, masses ...).

The paper ends with question marks. We have unfortunately not been able to cast the apparent quantization on the \tan of twice the mixing angles as $n/2, n \in \mathbb{Z}$ in relation with the $SU(2)_f \times U(1)_f$ flavor group of symmetry that underlies electroweak physics for two flavors. It is in particular because $\tan 2\theta_c$ is $1/2$ that it is connected with the Golden ratio [3][10]. Also, the recovery by perturbative (?) methods of the empirical properties of mixing angles that we uncovered in this work stays as a challenge.

2 Perturbative considerations

In this section, we show how finite (after renormalization for one of them) 1-loop counterterms introduced by Shabalin [4] in order to cancel on mass-shell non-diagonal transitions between quark mass eigenstates entail that mixing matrices linking (orthonormal) bare flavor states to renormalized mass states are in general non-unitary; accordingly, renormalized mass states do not form in general an orthonormal basis (as is demonstrated in section 3 from basic QFT argumentation). Neutral currents being controlled in (both bare and renormalized) mass space, by the unit matrix (which we demonstrate), we exhibit the non-unit matrix which controls them, at 1-loop, in the original flavor space. We also show, by explicit calculations in the case of two generations, how $SU(2)_L$ gauge symmetry preserves the unitarity of the Cabibbo matrix occurring in charged currents of renormalized mass eigenstates. It does not write anymore, however, as the product of the renormalized mixing matrices of each sector. The $SU(2)_L$ gauge algebra then closes on the unit matrix for gauge neutral currents. Last, we show that, at the price of a non-unitary renormalization of bare flavor states, which become then non-orthonormal, the mixing matrix in each sector can be made unitary. The standard relation $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_u^\dagger \mathfrak{C}_d$ between the renormalized Cabibbo matrix and these ones is then restored.

2.1 The 1-loop self-energy

The study of neutral kaons [7] has unambiguously shown that, while flavor eigenstates can be assumed to form an orthonormal basis, mass eigenstates (K_{Long}, K_{Short}) do not (see footnote 2); the corresponding mixing matrix can only be non-unitary.

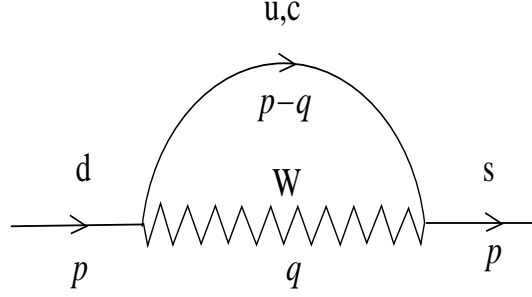


Fig. 1: d_m^0 to s_m^0 transitions at 1-loop

The situation could look very similar in the fermionic case, since there exist, for example, transitions between d_m^0 and s_m^0 ⁶, depicted in Fig. 1. They have the form of a non-diagonal kinetic term

$$f_d(p^2, m_u^2, m_c^2, m_W^2) \bar{s}_m^0 \not{p} (1 - \gamma^5) d_m^0, \quad (4)$$

in which the function f is dimensionless and includes the factors $g^2 \sin \theta_c \cos \theta_c (m_c^2 - m_u^2)$ (θ_c is the classical Cabibbo angle). One should however also take into consideration the work [4] ⁷ which shows how the introduction of finite counterterms can make these transitions vanish for d_m^0 or ⁸ s_m^0 on mass-shell. The following non-diagonal counterterms, which are of two types, kinetic as well as mass terms, and with both chiral structures:

$$-\left(A_d \bar{s}_m^0 \not{p} (1 - \gamma^5) d_m^0 + B_d \bar{s}_m^0 (1 - \gamma^5) d_m^0 + C_d \bar{s}_m^0 \not{p} (1 + \gamma^5) d_m^0 + D_d \bar{s}_m^0 (1 + \gamma^5) d_m^0 \right), \quad (5)$$

with

$$A_d = \frac{m_s^2 f_d(p^2 = m_s^2) - m_d^2 f_d(p^2 = m_d^2)}{m_s^2 - m_d^2}, \quad C_d = \frac{m_s m_d (f_d(p^2 = m_s^2) - f_d(p^2 = m_d^2))}{m_s^2 - m_d^2}, \\ B_d = -m_d C_d, \quad D_d = -m_s C_d, \quad (6)$$

are easily seen to play this role. They can be considered to restore, at 1-loop, the orthonormality of the classical mass eigenstates d_m^0 and s_m^0 .

Noting $\psi_{dm}^0 = \begin{pmatrix} d_m^0 \\ s_m^0 \end{pmatrix}$, the kinetic counterterms for d-type quarks rewrite

$$-A_d \overline{\psi_{dmL}^0} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \not{p} \psi_{dmL}^0 - C_d \overline{\psi_{dmR}^0} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \not{p} \psi_{dmR}^0, \quad (7)$$

and the mass counterterms

$$-\overline{\psi_{dmL}^0} \begin{pmatrix} & D_d \\ B_d & \end{pmatrix} \psi_{dmR}^0 - \overline{\psi_{dmR}^0} \begin{pmatrix} & B_d \\ D_d & \end{pmatrix} \psi_{dmL}^0. \quad (8)$$

⁶ d_m^0 and s_m^0 are the classical mass states obtained after diagonalization of the classical mass matrix by a bi-unitary transformation. At the classical level, they form an orthonormal basis; the situation is modified at 1-loop since $d_m^0 \leftrightarrow s_m^0$ can then occur.

⁷The introduction of these counterterms enabled to show that, in a left-handed theory, the electric dipole moment of the quarks vanished up to 2-loops. This resulted in a neutron electric dipole moment well below experimental limits [5].

⁸Both cannot be of course simultaneously on mass-shell.

Instead of the customary perturbative treatment of such counterterms in the bare orthonormal mass basis, order by order in the coupling constant, which can be rather cumbersome in this case ⁹, we shall instead consider and re-diagonalize the effective renormalized Lagrangian at 1-loop

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \overline{\psi_{dmL}^0} \begin{pmatrix} 1 & -A_d \\ -A_d & 1 \end{pmatrix} \not{D} \psi_{dmL}^0 + \overline{\psi_{dmR}^0} \begin{pmatrix} 1 & -C_d \\ -C_d & 1 \end{pmatrix} \not{D} \psi_{dmR}^0 \\ & - \overline{\psi_{dmL}^0} \begin{pmatrix} m_d & D_d \\ B_d & m_s \end{pmatrix} \psi_{dmR}^0 - \overline{\psi_{dmR}^0} \begin{pmatrix} m_d & B_d \\ D_d & m_s \end{pmatrix} \psi_{dmL}^0. \end{aligned} \quad (9)$$

The advantage of doing so is that a link can then easily be established with section 3 which uses the general QFT argumentation of [2][3] to get similar results. The diagonalization of (9) proceeds as follows.

- Find 2 matrices \mathcal{V}_d and \mathcal{U}_d such that, for the kinetic terms

$$\mathcal{V}_d^\dagger \begin{pmatrix} 1 & -A_d \\ -A_d & 1 \end{pmatrix} \mathcal{V}_d = 1 = \mathcal{U}_d^\dagger \begin{pmatrix} 1 & -C_d \\ -C_d & 1 \end{pmatrix} \mathcal{U}_d; \quad (10)$$

they then rewrite

$$\overline{\psi_{dmL}^0} \not{D} (\mathcal{V}_d^\dagger)^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} \psi_{dmL}^0 + \overline{\psi_{dmR}^0} \not{D} (\mathcal{U}_d^\dagger)^{-1} \mathcal{U}_d^{-1} \psi_{dmR}^0, \quad (11)$$

which leads to introducing the new states

$$\chi_{dL} = \mathcal{V}_d^{-1} \psi_{dmL}^0 = \mathcal{V}_d^{-1} \mathcal{C}_{d0}^{-1} \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}, \quad \chi_{dR} = \mathcal{U}_d^{-1} \psi_{dmR}^0 = \mathcal{U}_d^{-1} \mathcal{H}_{d0}^{-1} \begin{pmatrix} d_{fR} \\ s_{fR} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

where \mathcal{C}_{d0} and \mathcal{H}_{d0} are the two unitary matrices by which the classical mass matrix M_0 has been diagonalized into $\text{diag}(m_d, m_s)$ ¹⁰; we take them as follows ¹¹:

$$\mathcal{C}_{d0} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{dL} & -\sin \theta_{dL} \\ \sin \theta_{dL} & \cos \theta_{dL} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_{d0} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{dR} & -\sin \theta_{dR} \\ \sin \theta_{dR} & \cos \theta_{dR} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Solutions to the conditions (10) are the *non-unitary* matrices ¹²

$$\begin{aligned} (\mathcal{V}_d^\dagger)^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_{Ld} + A_d \sin \varphi_{Ld} & \sin \varphi_{Ld} - A_d \cos \varphi_{Ld} \\ -\sin \varphi_{Ld} & \cos \varphi_{Ld} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathcal{V}_d &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_{Ld} & \sin \varphi_{Ld} \\ -\sin \varphi_{Ld} + A_d \cos \varphi_{Ld} & \cos \varphi_{Ld} + A_d \sin \varphi_{Ld} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁹In particular, when neither d nor s is on mass shell, which starts occurring at 2 loops, their role does not restrict anymore to the cancellation of non-diagonal transitions.

¹⁰ $\text{diag}(m_d, m_s) = \mathcal{C}_{d0}^\dagger M_0 \mathcal{H}_{d0}$, where M_0 is the classical mass matrix.

¹¹We take a rotation matrix with angle $(-\theta_{dL})$ to match the formulæ of [2] [3].

¹²Maximal mixing, for example \mathcal{V}_d and \mathcal{U}_d equal to $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, also diagonalizes the kinetic terms, but not into the unit matrix. This accordingly requires two different renormalizations of the corresponding eigenvectors, which are $\frac{1}{\sqrt{2(1+A)}}(d_m^0 + s_m^0)$ and $\frac{1}{\sqrt{2(1-A)}}(d_m^0 - s_m^0)$. The mixing matrix connecting them to bare mass states is accordingly $\mathcal{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+A}} & \frac{1}{\sqrt{1+A}} \\ \frac{1}{\sqrt{1-A}} & -\frac{1}{\sqrt{1-A}} \end{pmatrix}$, which is again non-unitary: it satisfies $\mathcal{S} \mathcal{S}^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+A} & \\ & \frac{1}{1-A} \end{pmatrix}$. The mixing matrix connecting them to bare flavor states is thus also non-unitary (see footnote 13). This is why we look in general for non-unitary matrices.

$$\begin{aligned}
& \overset{A_d \text{ small}}{\approx} \begin{pmatrix} \cos \varphi_{Ld} & \sin \varphi_{Ld} \\ -\sin(\varphi_{Ld} - A_d) & \cos(\varphi_{Ld} - A_d) \end{pmatrix}, \\
(\mathcal{U}_d^\dagger)^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_{Rd} + C_d \sin \varphi_{Rd} & \sin \varphi_{Rd} - C_d \cos \varphi_{Rd} \\ -\sin \varphi_{Rd} & \cos \varphi_{Rd} \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \mathcal{U}_d &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_{Rd} & \sin \varphi_{Rd} \\ -\sin \varphi_{Rd} + C_d \cos \varphi_{Rd} & \cos \varphi_{Rd} + C_d \sin \varphi_{Rd} \end{pmatrix} \\
&\overset{C_d \text{ small}}{\approx} \begin{pmatrix} \cos \varphi_{Rd} & \sin \varphi_{Rd} \\ -\sin(\varphi_{Rd} - C_d) & \cos(\varphi_{Rd} - C_d) \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{14}$$

depending respectively of arbitrary angles φ_{Ld} and φ_{Rd} .

The connection between the flavor states and the $\chi_{L,R}$ states that diagonalize the kinetic terms goes accordingly through the non-unitary mixing matrices $\mathcal{C}_{d0} \mathcal{V}_d$ and $\mathcal{H}_{d0} \mathcal{U}_d$. At this stage, one has already made the transition from an *orthonormal bare mass basis* (d_m^0, s_m^0) ¹³ to *non-orthonormal* χ bases; the next bi-unitary transformation (below) will not change this fact.

- Express the renormalized mass matrix in the new $\chi_{L,R}$ basis

$$\overline{\psi_{dmL}^0} \begin{pmatrix} m_d & D_d \\ B_d & m_s \end{pmatrix} \psi_{dmR}^0 = \overline{\chi_{dL}} \mathcal{M} \chi_{dR}, \quad \mathcal{M} = \mathcal{V}_d^\dagger \begin{pmatrix} m_d & D_d \\ B_d & m_s \end{pmatrix} \mathcal{U}_d \tag{15}$$

and diagonalize it by a second bi-unitary transformation

$$V_d^\dagger \mathcal{M} U_d = \begin{pmatrix} \mu_d & \\ & \mu_s \end{pmatrix} \tag{16}$$

which, since it is bi-unitary, leaves the kinetic terms unchanged. The new (renormalized) mass eigenstates are accordingly

$$\xi_{dL} = V_d^{-1} \chi_{dL} = V_d^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} \mathcal{C}_{d0}^{-1} \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}, \quad \xi_{dR} = U_d^{-1} \chi_{dR} = U_d^{-1} \mathcal{U}_d^{-1} \mathcal{H}_{d0}^{-1} \begin{pmatrix} d_{fR} \\ s_{fR} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

which correspond to the non-unitary mixing matrices $\mathcal{C}_{d0} \mathcal{V}_d V_d$ and $\mathcal{H}_{d0} \mathcal{U}_d U_d$ respectively for left-handed and right-handed fermions. The renormalized mass bases are accordingly non-orthonormal (see footnote 13)¹⁴.

- Parametrizing V_d as

$$V_d = \begin{pmatrix} \cos \theta_{2Ld} & \sin \theta_{2Ld} \\ -\sin \theta_{2Ld} & \cos \theta_{2Ld} \end{pmatrix}, \tag{18}$$

one gets:

$$\mathcal{V}_d V_d = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) & \sin(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) \\ -\sin(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} - A_d) & \cos(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} - A_d) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

which is of the same form as \mathcal{V}_d , and

¹³since (d_m^0, s_m^0) is obtained from the bare flavor basis, supposed to be orthonormal, by unitary transformations.

¹⁴Orthogonality was restored at 1-loop by Shabalin's counterterms for the bare mass basis. We see that it is not the case for the renormalized mass basis.

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_d = \mathcal{C}_{d0} \mathcal{V}_d V_d = & \begin{pmatrix} \cos(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} - \theta_{dL}) & \sin(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} - \theta_{dL}) \\ -\sin(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} - \theta_{dL}) & \cos(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} - \theta_{dL}) \end{pmatrix} \\ & + A_d \begin{pmatrix} -\sin \theta_{dL} \cos(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) & -\sin \theta_{dL} \sin(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) \\ \cos \theta_{dL} \cos(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) & \cos \theta_{dL} \sin(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Since φ_{Ld} is arbitrary, we can choose $\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld} = 0$, which amounts to using this arbitrariness to cancel the influence of the mass counterterms B_d, D_d . So doing, one gets finally the mixing matrix \mathcal{C}_d

connecting the bare flavor states $\begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}$ to the renormalized mass eigenstates ξ_{dL}

$$\mathcal{C}_d \equiv \mathcal{C}_{d0} \mathcal{V}_d V_d = \begin{pmatrix} \cos \theta_{dL} - A_d \sin \theta_{dL} & -\sin \theta_{dL} \\ \sin \theta_{dL} + A_d \cos \theta_{dL} & \cos \theta_{dL} \end{pmatrix} \overset{A_d \text{ small}}{\approx} \begin{pmatrix} \cos(\theta_{dL} + A_d) & -\sin \theta_{dL} \\ \sin(\theta_{dL} + A_d) & \cos \theta_{dL} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

or, equivalently ¹⁵

$$\mathcal{C}_d^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{dL} & \sin \theta_{dL} \\ -\sin \theta_{dL} - A_d \cos \theta_{dL} & \cos \theta_{dL} - A_d \sin \theta_{dL} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \cos \theta_{dL} & \sin \theta_{dL} \\ -\sin(\theta_{dL} + A_d) & \cos(\theta_{dL} + A_d) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

It satisfies in particular

$$\mathcal{C}_d \mathcal{C}_d^\dagger \approx \begin{pmatrix} 1 - 2A_d \sin \theta_{dL} \cos \theta_{dL} & A_d(\cos^2 \theta_{dL} - \sin^2 \theta_{dL}) \\ A_d(\cos^2 \theta_{dL} - \sin^2 \theta_{dL}) & 1 + 2A_d \sin \theta_{dL} \cos \theta_{dL} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_d^\dagger \mathcal{C}_d = \begin{pmatrix} 1 & A_d \\ A_d & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{V}_d \mathcal{V}_d^\dagger, \quad (24)$$

$$(\mathcal{C}_d^{-1})^\dagger \mathcal{C}_d^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1 + 2A_d \sin \theta_{dL} \cos \theta_{dL} & A_d(\sin^2 \theta_{dL} - \cos^2 \theta_{dL}) \\ A_d(\sin^2 \theta_{dL} - \cos^2 \theta_{dL}) & 1 - 2A_d \sin \theta_{dL} \cos \theta_{dL} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Eq.(25) is specially relevant since, once neutral currents are controlled, as we show later, in the (non-orthonormal) mass basis ξ_{dL} by the unit matrix, $(\mathcal{C}_d^{-1})^\dagger \mathcal{C}_d^{-1}$ provides, after introducing Shabalin's 1-loop

¹⁵In [2][3], we parametrized the non-unitary mixing matrix C as

$$C = \begin{pmatrix} \cos \theta_{dL} & \sin \theta_{dL} \\ -\sin \theta_{dL} - \epsilon_d \cos \theta_{dL} & \cos \theta_{dL} - \epsilon_d \sin \theta_{dL} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Comparing (22) with (23), we see that, once ϵ_d and A_d have been identified, the roles of \mathcal{C}_d and \mathcal{C}_d^{-1} have here been swapped with respect to [2][3]. In [2][3], the logic advocated for was that the two properties that neutral currents were universal and that no FCNC's occurred in flavor space, once taken for granted, did not systematically translate to the space of mass eigenstates for non-degenerate systems; since, in this last basis, neutral currents are controlled by $C^\dagger C$, the equations referred, there, to this product.

The perturbative analysis shows (and this will be confirmed by straightforward arguments at the beginning of subsection 3.2) that what we called C in [2][3] is in reality \mathcal{C}^{-1} . The results of [2][3] are accordingly unchanged if we inverse the logic advocated there. The condition taken for granted should now be that, in the space of mass states, the property that neutral currents are universal and there does not exist non-diagonal neutral currents no longer translates unchanged, for non-degenerate systems, to the space of flavor states; in the latter, neutral currents are now controlled by $(\mathcal{C}^{-1})^\dagger \mathcal{C}^{-1}$, with the parametrization (23). The corresponding equations become manifestly identical to those obtained in [2][3] from $C^\dagger C$ with the parametrization (22).

counterterms in mass space, the renormalized 1-loop Lagrangian for neutral currents in the original flavor basis $\begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}$.

When the system becomes degenerate, the reasons to forbid $d_m^0 \leftrightarrow s_m^0$ on mass-shell transitions disappear and Shabalin's counterterms are expected to vanish. There is then no more need to introduce any non-unitary mixing matrix. The same result can be reached by the general QFT arguments of [2] since one can always choose an orthonormal basis of degenerate mass eigenstates; any connection between them and the (supposedly orthonormal) bare flavor basis goes then through unitary mixing matrices.

2.1.1 Summary of the perturbative 1-loop procedure

Since the procedure to go from the bare Lagrangian to the effective renormalized Lagrangian at 1-loop in flavor space is, though simple, not completely trivial, we make a brief summary of it below:

- * the bare flavor basis can be supposed to be orthonormal;
- * the bare mass basis, obtained from the diagonalization of the bare mass matrix by (bi)-unitary transformations, is orthonormal, too;
- * in this bare mass basis, there appear at 1-loop non-diagonal transitions, and also flavor changing neutral currents;
- * finite counterterms are introduced in this basis to cancel non-diagonal on mass-shell transitions;
- * they alter the matrix of kinetic terms, which, in the same basis, is no longer 1, and the mass matrix, which is no longer diagonal;
- * putting back kinetic terms to the unit matrix requires non-unitary transformations; the new states χ so defined do not form anymore an orthonormal basis;
- * the mass matrix, including the newly added counterterms, has to be re-expressed in the χ bases and re-diagonalized by a bi-unitary transformation; this does not change anymore the kinetic terms;
- * this last diagonalization defines the renormalized mass states, which are obtained from the bare flavor states by a product of three matrices, two being unitary and one non-unitary; they accordingly do not form an orthonormal basis (the same result is obtained in section 3 from general considerations of QFT);
- * this is the counterpart of canceling, on mass-shell, through finite counterterms, the non-diagonal flavor transitions that occurred between bare mass states; the orthogonality between bare mass states, which can be considered to be, in some way, restored at 1-loop, for d or s on mass-shell, turns out to be broken again for renormalized mass states. The situation, after renormalization, is thus very similar to the one studied in [7] for neutral kaons;
- * once the (non-unitary) mixing matrix \mathcal{C} linking renormalized mass states to bare flavor states at 1-loop has been defined by this procedure, we will show in subsection 2.2.3 that, in the renormalized (non-orthonormal) mass basis, the renormalized Lagrangian at 1-loop for neutral currents is controlled by the unit matrix. This entails that the quantity $(\mathcal{C}^{-1})^\dagger \mathcal{C}^{-1}$ determines the same Lagrangian in the bare flavor basis (it differs from the unit matrix, its usual expression in the absence of Shabalin's counterterms).

2.1.2 Renormalization and finiteness of the counterterms

The function f_d which appears in (4), calculated in the unitary gauge for the W boson and dimensionally regularized, is proportional to [4]

$$g^2 \sin \theta_c \cos \theta_c (m_c^2 - m_u^2) \int_0^1 dx \left(\frac{2x(1-x)}{\Delta(p^2)} + \frac{p^2 x^3 (1-x)}{M_W^2 \Delta(p^2)} + \frac{x + 3x^2}{M_W^2 \Delta(p^2)^{2-n/2}} \Gamma(2 - n/2) \right). \quad (26)$$

$n = 4 - \epsilon$ is the dimension of space-time, $\Delta(p^2) = (1-x)M_W^2 + x\frac{m_u^2 + m_c^2}{2} - x(1-x)p^2$, and Γ is the Gamma function $\Gamma(\epsilon/2) = 2/\epsilon - \gamma + \dots$ where $\gamma \approx 0.5772\dots$ is the Euler constant. In particular, it includes a pole $(1/\epsilon)$ term and finite terms

$$f_d \ni g^2 \sin \theta_c \cos \theta_c (m_c^2 - m_u^2) \int_0^1 dx \frac{x + 3x^2}{M_W^2} (2/\epsilon - \gamma) + \text{finite}; \quad (27)$$

we have decomposed the latter into the one proportional to the Euler constant, independent of p^2, m_c^2, m_u^2 , and *finite*, which depends on them. So, while C_d, B_d and D_d are finite, A_d needs a renormalization to be defined. The only constraint that must indeed be satisfied is that, as can easily be checked, the combination

$$(m_c^2 - m_u^2)A_u - (m_s^2 - m_d^2)A_d \quad (28)$$

is finite. It is indeed proportional (see (6)) to $m_c^2 f_u(p^2 = m_c^2) - m_u^2 f_u(p^2 = m_u^2) - m_s^2 f_d(p^2 = m_s^2) + m_d^2 f_d(p^2 = m_d^2)$, in which f_u is defined by a formula analogous to (26), with the exchange $m_c \leftrightarrow m_s, m_u \leftrightarrow m_d$; the finiteness of (28) results from the independence of the pole term in (26) on the quark masses, but for the global factor $(m_{c,s}^2 - m_{u,d}^2)$.

There is always an arbitrariness in the process of renormalization. For example, the so-called MS and \overline{MS} schemes, both perfectly adequate, differ by the subtraction, in addition to the pure pole part, of the term proportional to γ in (27). It is easy to check that (28) is finite in both MS and \overline{MS} schemes, and that the following relation is satisfied $(m_c^2 - m_u^2)A_u^{MS} - (m_s^2 - m_d^2)A_d^{MS} = (m_c^2 - m_u^2)A_u^{\overline{MS}} - (m_s^2 - m_d^2)A_d^{\overline{MS}}$. This entails in particular that A_u and A_d cannot be simultaneously renormalized to zero and, thus, that a non-unitary mixing matrix is always at work in, at least, one of the two fermionic sectors ($u, c \dots$) and ($d, s \dots$). We invoke now another scheme, of the same class as the MS and \overline{MS} schemes, that is, in which the renormalized A_u^R and A_d^R satisfy

$$(m_c^2 - m_u^2)A_u^R - (m_s^2 - m_d^2)A_d^R = (m_c^2 - m_u^2)A_u^{\overline{MS}} - (m_s^2 - m_d^2)A_d^{\overline{MS}}. \quad (29)$$

We shall use it later in subsection 7.2 when dealing with the alignment of flavor and mass states in one of the two sectors. It differs from the \overline{MS} scheme in the same way as the latter differs from the MS scheme, by the subtraction of a constant, and is defined as follows:

* first go to (finite) $A_d^{\overline{MS}} = A_d - \eta_d$ by dropping the pole term and the one proportional to γ in (26); it corresponds to the \overline{MS} scheme and $A_d^{\overline{MS}}$ depends in particular on θ_{dL} ;

* in addition to the finite subtraction above proportional to γ , define A_d^R by $A_d^R = A_d^{\overline{MS}}(\theta_{dL}) - A_d^{\overline{MS}}(\theta_{dL} = 0)$; it satisfies accordingly

$$A_d^R(\theta_{dL} = 0) = 0; \quad (30)$$

A_d^R vanishes simultaneously with θ_{dL} , such that, in this scheme, mass and flavor eigenstates keep aligned at 1-loop in the (d, s) sector if they are aligned at the classical level¹⁶. Then, according to (29), A_u should be renormalized into

$$A_u^R = A_u^{\overline{MS}} - \frac{m_s^2 - m_d^2}{m_c^2 - m_u^2} A_d^{\overline{MS}}(\theta_{dL} = 0). \quad (31)$$

Since f_d is proportional to $\sin(\theta_{dL} - \theta_{uL})$, $A_d^{\overline{MS}}(\theta_{dL} = 0)$ in (31) vanishes with θ_{uL} , and, in particular

$$A_u^R(\theta_{uL} = 0) = A_u^{\overline{MS}}(\theta_{uL} = 0), \quad (32)$$

which has, unlike (30), no reason to vanish. So, renormalizing A_d such that it vanishes with θ_{dL} , one cannot at the same time renormalize A_u such that it vanishes with θ_{uL} (and *vice versa*; see footnote 16). In the following A_d and A_u stand for their renormalized, finite, values.

2.2 Gauge currents and renormalized mixing matrices

2.2.1 An erroneous argumentation leading to a non-unitary Cabibbo matrix

The same argumentation as above leads to a mixing matrix

$$C_u^{A_u \text{ small}} \approx \begin{pmatrix} \cos(\theta_{uL} + A_u) & -\sin \theta_{uL} \\ \sin(\theta_{uL} + A_u) & \cos \theta_{uL} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

¹⁶In subsection 7.2, aligning mass and flavor eigenstates in the (u, c) sector, that is setting *de facto* $\theta_{uL} = 0$, we shall, instead, advocate for the renormalization scheme in which A_u^R vanishes with θ_{uL} .

in the (u, c) channel, where A_u is given by a formula similar to (6) with the roles of (d, s) and (u, c) quarks interchanged.

One could think that, in analogy with the customary case, the renormalized Cabibbo matrix which appears in the Lagrangian for charged currents writes, when expressed in the basis of the renormalized (non orthonormal) mass eigenstates ξ_{uL} and ξ_{dL}

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) - (A_d - A_u) \sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & -\sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) + A_u \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \\ \sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) + A_d \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL} + (A_d - A_u)) & -\sin(\theta_{dL} - \theta_{uL} - A_u) \\ \sin(\theta_{dL} - \theta_{uL} + A_d) & \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (34)$$

that is, a non-unitary expression whatever be A_u and A_d . This is however wrong, as we show below.

2.2.2 $SU(2)_L$ gauge symmetry: how the renormalized Cabibbo matrix stays unitary

$SU(2)_L$ gauge invariance, through the expression of the covariant derivatives of the fermionic fields, requires that the same counterterms that occur for the kinetic terms should also occur inside the gauge couplings. Let us consider a kinetic fermionic term in its canonical form $\bar{\Psi} \overleftrightarrow{\partial} \Psi \equiv \frac{1}{2}(\bar{\Psi} \partial \Psi - (\partial \bar{\Psi}) \Psi)$, and call A the generic kinetic counterterm. In the kinetic term ∂ is accordingly replaced with $A\partial$ and, introducing the covariant $SU(2)_L$ derivative in the two terms of $\bar{\Psi} \overleftrightarrow{\partial} \Psi$ yields $\frac{1}{2} \bar{\Psi} A(\partial - ig \vec{W} \cdot \vec{T}) \Psi - \frac{1}{2} (A(\partial - ig \vec{W} \cdot \vec{T}) \bar{\Psi}) \Psi = \bar{\Psi} A \partial \Psi - \frac{ig}{2} \bar{\Psi} (A \vec{T} + \vec{T} A) \cdot \vec{W} \Psi$. Calling

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -A_u & & \\ -A_u & 1 & & \\ \hline & & 1 & -A_d \\ & & -A_d & 1 \end{array} \right) \quad (35)$$

the matrix of counterterms, the Lagrangian in bare mass space must accordingly include

$$\mathcal{L} \in \left(\begin{array}{cccc} \bar{u}_{mL}^0 & \bar{c}_{mL}^0 & \bar{d}_{mL}^0 & \bar{s}_{mL}^0 \end{array} \right) \left(A \not{\partial} - \frac{ig}{2} (A \vec{T} + \vec{T} A) \cdot \vec{W}_\mu \gamma^\mu \dots \right) \begin{pmatrix} u_{mL}^0 \\ c_{mL}^0 \\ d_{mL}^0 \\ s_{mL}^0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

It is hermitian and involves the (Cabibbo rotated) $SU(2)_L$ generators \vec{T}

$$T^3 = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & -1 \end{array} \right), T^+ = \left(\begin{array}{c|c} & C_0 \\ \hline & \end{array} \right), T^- = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline C_0^\dagger & \end{array} \right); \quad (37)$$

$C_0 = C_{u0}^\dagger C_{d0}$ is the bare unitary Cabibbo matrix, C_{u0} and C_{d0} being the bare unitary mixing matrices in the up and down sectors, which we have chosen as (see (13)) $C_{u0,d0} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{uL,dL} & -\sin \theta_{uL,dL} \\ \sin \theta_{uL,dL} & \cos \theta_{uL,dL} \end{pmatrix}$.

The mixing matrix has become, in the basis of bare mass eigenstates:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & -A_u \\ -A_u & 1 \end{pmatrix} C_0 + C_0 \begin{pmatrix} 1 & -A_d \\ -A_d & 1 \end{pmatrix} \right]. \quad (38)$$

\mathcal{C} is not unitary in this basis. However, going to the final basis of ξ mass eigenstates $\xi_{u,L} = V_u^{-1} \mathcal{V}_u^{-1} \begin{pmatrix} u_{mL}^0 \\ c_{mL}^0 \end{pmatrix}$,

$\xi_{d,L} = V_d^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} \begin{pmatrix} d_{mL}^0 \\ s_{mL}^0 \end{pmatrix}$, it becomes

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \frac{1}{2} V_u^\dagger \mathcal{V}_u^\dagger \left[\begin{pmatrix} 1 & -A_u \\ -A_u & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} 1 & -A_d \\ -A_d & 1 \end{pmatrix} \right] \mathcal{V}_d V_d \\ &= \frac{1}{2} V_u^\dagger \mathcal{V}_u^\dagger \left((\mathcal{V}_u^\dagger)^{-1} \mathcal{V}_u^{-1} \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_0 (\mathcal{V}_d^\dagger)^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} \right) \mathcal{V}_d V_d \\ &= \frac{1}{2} \left(V_u^\dagger \mathcal{V}_u^{-1} \mathcal{C}_0 \mathcal{V}_d V_d + V_u^\dagger \mathcal{V}_u^\dagger \mathcal{C}_0 (\mathcal{V}_d^\dagger)^{-1} V_d \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Using $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{u0}^\dagger \mathcal{C}_{d0} = (\mathcal{V}_u^\dagger)^{-1} (V_u^\dagger)^{-1} [\mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d] V_d^{-1} \mathcal{V}_d^{-1}$, one finds

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{2} \left(V_u^\dagger \mathcal{V}_u^{-1} (\mathcal{V}_u^\dagger)^{-1} (V_u^\dagger)^{-1} [\mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d] + [\mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d] V_d^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} (\mathcal{V}_d^\dagger)^{-1} V_d \right), \quad (40)$$

which, using $\mathcal{V}_{u,d}^{-1} (\mathcal{V}_{u,d}^\dagger)^{-1} = 1 + A_{u,d} \begin{pmatrix} \sin 2\varphi_{Lu,Ld} & -\cos 2\varphi_{Lu,Ld} \\ -\cos 2\varphi_{Lu,Ld} & -\sin 2\varphi_{Lu,Ld} \end{pmatrix}$, gives

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d + \frac{1}{2} \left[A_u \begin{pmatrix} \sin 2(\varphi_{Lu} + \theta_{2Lu}) & -\cos 2(\varphi_{Lu} + \theta_{2Lu}) \\ -\cos 2(\varphi_{Lu} + \theta_{2Lu}) & -\sin 2(\varphi_{Lu} + \theta_{2Lu}) \end{pmatrix} \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d \right. \\ &\quad \left. + A_d \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d \begin{pmatrix} \sin 2(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) & -\cos 2(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) \\ -\cos 2(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) & -\sin 2(\varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}) \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Choosing, as we did before, $\varphi_{Lu} + \theta_{2Lu} = 0 = \varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}$, one gets finally:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d - \frac{1}{2} \left[A_u \begin{pmatrix} & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d + A_d \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \right] \\ &= \mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -(A_d - A_u) \sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & (A_d + A_u) \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \\ (A_d + A_u) \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & (A_d - A_u) \sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & -\sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \\ \sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (A_d - A_u) \begin{pmatrix} -\sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & -\cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \\ \cos(\theta_{dL} - \theta_{uL}) & -\sin(\theta_{dL} - \theta_{uL}) \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} \cos \hat{\theta}_c & -\sin \hat{\theta}_c \\ \sin \hat{\theta}_c & \cos \hat{\theta}_c \end{pmatrix}, \quad \tilde{\theta}_c = \theta_{dL} - \theta_{uL} + \frac{1}{2} (A_d - A_u). \end{aligned} \quad (42)$$

So, once Shabalin's counterterms and the change of basis have both been taken into account, the renormalized Cabibbo matrix, which does not write anymore as the product $\mathcal{C}_u^\dagger \mathcal{C}_d$, becomes again unitary. This occurs because of $SU(2)_L$ gauge invariance, and despite the fact that neither \mathcal{C}_u nor \mathcal{C}_d is unitary. With respect to its classical value, the Cabibbo angle gets renormalized by $\frac{A_u - A_d}{2}$.

2.2.3 Neutral currents and $SU(2)_L$ gauge invariance.

Like charged currents, the form of neutral currents is determined by gauge invariance, through the $SU(2)_L$ covariant derivative. It is given in the bare mass basis by (36), which easily translates to the

renormalized mass basis. The latter deduces indeed from the former by the transformations

$$\xi_{u,L} = V_u^{-1} \mathcal{V}_u^{-1} \begin{pmatrix} u_{mL}^0 \\ c_{mL}^0 \end{pmatrix}, \quad \xi_{d,L} = V_d^{-1} \mathcal{V}_d^{-1} \begin{pmatrix} d_{mL}^0 \\ s_{mL}^0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

The procedure is specially simple since the T^3 generator only involves unit matrices in each sector, such that $V^{-1} \mathcal{V}^{-1}$ can freely move through it. Since this (product of) matrix turns back $\begin{pmatrix} 1 & -A \\ -A & 1 \end{pmatrix}$ into the unit matrix, the 1-loop effective Lagrangian for neutral currents gets controlled by the unit matrix in the renormalized mass basis.

So, $SU(2)_L$ gauge invariance ensures that neutral currents are controlled by the unit matrix:

- at the classical level in the basis of bare (orthonormal) mass states;
- in the Lagrangian renormalized at 1-loop in the basis of renormalized (non-orthonormal) mass states.

After Shabalin's finite counterterms $A_u \equiv \epsilon_u$ and $A_d \equiv \epsilon_d$ have been included, in the renormalized mass basis (ξ_{uL}, ξ_{dL}) , the $SU(2)_L$ generators write

$$T^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & | & \\ \hline & & \\ \hline & & -1 \end{pmatrix}, T^+ = \begin{pmatrix} & | & \mathfrak{C} \\ \hline & & \\ \hline & & \end{pmatrix}, T^- = \begin{pmatrix} & | & \\ \hline & & \\ \hline \mathfrak{C}^\dagger & | & \end{pmatrix}; \quad (44)$$

of course, the unitarity of \mathfrak{C} is necessary for its closure on the unit matrix in the neutral gauge sector.

2.2.4 Shabalin's counterterms in the calculation of physical transitions

As far as physics is concerned, some remarks are due concerning decays like $K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu}$, $\mu \rightarrow e \gamma$, $\mu \rightarrow e \nu \bar{\nu}$, for which 1-loop flavor changing neutral currents play an important role. One could indeed wonder what are the consequences on these transitions of the introduction of Shabalin's counterterms.

The first possibility is to work in the (d_m^0, s_m^0) bare mass basis. Its orthonormality at the classical level turns however to be broken at 1-loop. To remedy this, the A, B, C, D counterterms of Shabalin have to be explicitly included, and taken care of in any perturbative calculation. At 1-loop, they cancel on mass-shell $d_m^0 \leftrightarrow s_m^0$ transitions, which is the purpose of their introduction. The standard treatment order by order in the coupling constant may however not be the easiest way to proceed, due to the twofold nature (kinetic and mass) and chirality of these counterterms, and the fact, that, for d and s off mass-shell, their action cannot be reduced to the cancellation of non-diagonal $d_m^0 \leftrightarrow s_m^0$ transitions. The second possibility is to re-diagonalize the bare Lagrangian to which the 1-loop counterterms have been added and to work in the resulting renormalized mass basis. By so doing, the effects of the counterterms are taken care of by the finite renormalization of the mixing angles and the non-orthonormality of the renormalized basis¹⁷. The framework for calculations become similar to the one in [7] for neutral kaons¹⁸, the physical mass eigenstates of which did not form either an orthonormal basis.

2.2.5 Charged gauge currents in flavor space; renormalized flavor states.

It is now interesting to write back the renormalized Lagrangian in bare flavor space (it is in this basis that we uncovered empirical specific breaking patterns). One gets

¹⁷among which there exists *a priori* non-diagonal transitions through diagrams equivalent to Fig. 1.

¹⁸with the simplification that we do not have to introduce here, unlike in [7], a non-hermitian (effective) Lagrangian.

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_{uL} \mathfrak{C} \gamma^\mu \xi_{dL} &= \begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} \left[1 - \frac{A_u}{2} (\mathcal{C}_u^\dagger)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_u^\dagger - \frac{A_d}{2} \mathcal{C}_d \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_d^{-1} \right] \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} [1 + A_u \mathcal{T}_z(\theta_{uL}) + A_d \mathcal{T}_z(\theta_{dL})] \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \tag{45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\approx \begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} [1 + A_u \mathcal{T}_z(\theta_{uL})][1 + A_d \mathcal{T}_z(\theta_{dL})] \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \\
&\approx \overline{e^{A_u \mathcal{T}_z(\theta_{uL})} \begin{pmatrix} u_{fL} \\ c_{fL} \end{pmatrix}} \gamma^\mu e^{A_d \mathcal{T}_z(\theta_{dL})} \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}, \tag{46}
\end{aligned}$$

where we have anticipated a notation that will be justified in section 6

$$\mathcal{T}_z(\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{pmatrix}, \tag{47}$$

and used the relations $(\mathcal{C}_u^\dagger)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_u^\dagger = -2\mathcal{T}_z(\theta_{uL}) + \mathcal{O}(A_u)$, $\mathcal{C}_d \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_d^{-1} = -2\mathcal{T}_z(\theta_{dL}) + \mathcal{O}(A_d)$. It is therefore possible to define as “renormalized flavor states” the ones that appear in the last line of (46)

$$f_{dL} = e^{A_d \mathcal{T}_z(\theta_{dL})} \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \text{ and } f_{uL} = e^{A_u \mathcal{T}_z(\theta_{uL})} \begin{pmatrix} u_{fL} \\ c_{fL} \end{pmatrix}. \tag{48}$$

They are deduced from the bare flavor states by the non-unitary transformations $e^{\frac{A_{u,d}}{2} \mathcal{T}_z(\theta_{uL,dL})}$, and do not form anymore, accordingly, an orthonormal basis. In the renormalized flavor basis, the $SU(2)_L$ generators write in their simplest form

$$T^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, T^+ = \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}, T^- = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ 1 & & \end{pmatrix}; \tag{49}$$

universality is thus achieved together with the absence of FCNC's, like in the basis of renormalized mass states. The two points of view describe of course the same physics: in the non-orthonormal renormalized flavor basis, neutral currents are controlled by the unit matrix (seemingly absence of non-diagonal transitions, but they still occur through the non-orthogonality of the states), and, in the bare flavor basis, neutral currents are controlled by a matrix slightly different from the unit matrix (non-diagonal transitions between orthogonal states are then conspicuous).

The last step is to calculate the mixing matrices \mathfrak{C} linking the renormalized mass states ξ in (17) to the renormalized flavor states f in (48). From (23) and (48), it is straightforward to deduce

$$\mathfrak{C}_d^{-1} = \mathcal{C}_d^{-1} e^{-\frac{A_d}{2} T_d} \approx \mathcal{C}_d^{-1} (1 - \frac{A_d}{2} T_d) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{dL} + \frac{A_d}{2}) & \sin(\theta_{dL} + \frac{A_d}{2}) \\ -\sin(\theta_{dL} + \frac{A_d}{2}) & \cos(\theta_{dL} + \frac{A_d}{2}) \end{pmatrix}, \tag{50}$$

which is unitary, and thus

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_u^\dagger \mathfrak{C}_d. \tag{51}$$

So, renormalized mass states are connected to renormalized flavor states through unitary mixing matrices. In the renormalized flavor basis, the sole effects of Shabalin's finite counterterms is a finite renormalization of the mixing angles.

After all these steps have been gone through, the 1-loop renormalized Lagrangian writes identically to the bare Lagrangian with:

- * renormalized masses, renormalized (mass and flavor) eigenstates;
- * unitary mixing matrices;
- * mixing angles renormalized by Shabalin's kinetic counterterms.

It has the same form as the bare Lagrangian of the Standard Model, except that the notion of flavor has been redefined, such that it no longer appears as a strictly conserved quantity.

3 Neutral currents of flavor eigenstates; general QFT argumentation

After establishing by perturbative arguments the *a priori* non-unitarity of mixing matrices for non-degenerate coupled systems, we come back to the argumentation of [2] based on general principles of Quantum Field Theory, then generalize it to the case of three generations. It does not rely on a perturbative treatment. The existence of two types of solutions (Cabibbo-like and maximal) of the “unitarization equations” (see subsection 3.3 below), arises independently of perturbative arguments. For example, uncovering maximal mixing requires introducing, in the case of two generations, two mixing angles which can be far away from each other (only the “Cabibbo-like case $\theta_2 = \theta_1 + \epsilon$ is expected to be “perturbative”). This is in agreement with the intuitive argument that large mixing angles are related with quasi-degeneracy, in which case small variations (for example in the mass spectrum) can have large (hence non-perturbative) effects on eigenstates, and thus on the mixing angles themselves.

The only “perturbative expansions”, that will be performed in sections 4 and 5, concern small deviations from the solutions of the “unitarization equations”.

3.1 Different basis of fermions

Three bases will appear in sections 3, 4, 5:

- * flavor eigenstates, that we note (u_f, c_f, t_f) and (d_f, s_f, b_f) for quarks, (e_f, μ_f, τ_f) and $(\nu_{ef}, \nu_{\mu f}, \nu_{\tau f})$ for leptons;
- * mass eigenstates that we note (u_m, c_m, t_m) and (d_m, s_m, b_m) for quarks, (e_m, μ_m, τ_m) and $(\nu_{em}, \nu_{\mu m}, \nu_{\tau m})$ for leptons; they include in particular the charged leptons detected experimentally, since their identification proceeds through the measurement of their *charge/mass* ratio in a magnetic field; these eigenstates are the ones of the full renormalized propagator at its poles; at 1-loop, they can be identified with components of the renormalized mass states ξ of (17) in section 2;
- * the neutrinos that couple to mass eigenstates of charged leptons in charged weak currents. These are the usual “electronic”, “muonic” and “ τ ” neutrinos ν_e, ν_μ, ν_τ considered in SM textbooks: they are indeed identified by the outgoing charged leptons that they produce through charged weak currents, and the latter are precisely mass eigenstates (see above). These states read (see also Appendix D)

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = K_\ell^\dagger \begin{pmatrix} \nu_{ef} \\ \nu_{\mu f} \\ \nu_{\tau f} \end{pmatrix} = (K_\ell^\dagger K_\nu) \begin{pmatrix} \nu_{em} \\ \nu_{\mu m} \\ \nu_{\tau m} \end{pmatrix}, \quad (52)$$

where K_ℓ and K_ν are the mixing matrices respectively of charged leptons and of neutrinos (*i.e.* the matrices that connect their flavor to their mass eigenstates). Note that these neutrinos coincide with flavor eigenstates when the mixing matrix of *charged leptons* is taken equal to unity $K_\ell = 1$, *i.e.* when the mass and flavor eigenstates of charged leptons are aligned, which is often assumed in the literature.

3.2 Mixing matrices. Notations

We start again with the case of two generations, and use the notations of [2]. The flavor states are ψ_1 and ψ_2 (they can be for example the d_{fL} and s_{fL} of section 2); a first orthonormal basis of the (hermitian) renormalized quadratic Lagrangian is made of the first mass eigenstate, ϕ_m^1 , and of the second eigenstate, ω_1^2 , of the full propagator at $q^2 = m_1^2$, and a second orthonormal basis is made of the second mass eigenstate, ϕ_m^2 , and of the second eigenstate, ω_2^1 , of the propagator at $q^2 = m_2^2$ ¹⁹. For example, at 1-loop, ϕ_m^1 and ϕ_m^2 can be identified with the two components of ξ_{dL} (see (17) in section 2).

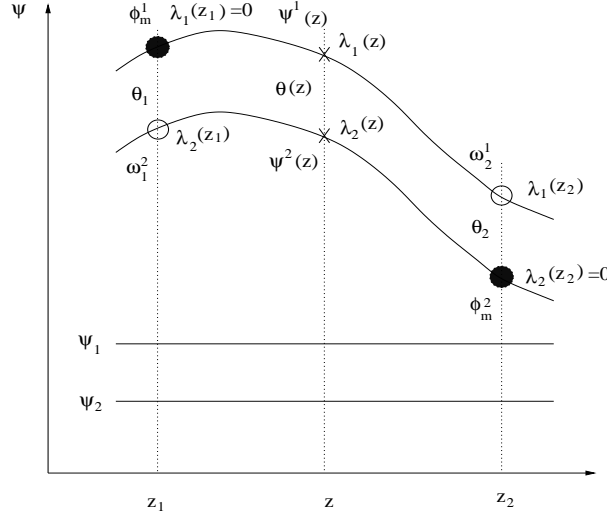


Fig. 2: Eigenstates of a binary complex system

The flavor states ψ_1 and ψ_2 can be expressed in both orthonormal bases (ϕ_m^1, ω_1^2) and (ϕ_m^2, ω_2^1) according to

$$\begin{aligned} \psi_1 &= c_1 \phi_m^1 - s_1 \omega_1^2 = c_2 \omega_2^1 - s_2 \phi_m^2, \\ \psi_2 &= s_1 \phi_m^1 + c_1 \omega_1^2 = s_2 \omega_2^1 + c_2 \phi_m^2, \end{aligned} \quad (53)$$

which yields

$$\begin{pmatrix} \phi_m^1 \\ \phi_m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 \\ -s_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (54a)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{c_1 c_2 + s_1 s_2} \begin{pmatrix} c_2 & -s_1 \\ s_2 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_m^1 \\ \phi_m^2 \end{pmatrix}. \quad (54b)$$

Eq.(54a) entails

$$|\phi_m^1| = 1 = |\phi_m^2|, \quad \langle \phi_m^2 | \phi_m^1 \rangle = s_1 c_2 - c_1 s_2 \stackrel{\theta_2 \neq \theta_1}{\neq} 0. \quad (55)$$

(54a) shows that, for 2 generations, the mixing matrix C satisfies²⁰

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 \\ -s_2 & c_2 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

¹⁹On Fig. 2, the $\lambda(z)$'s are the eigenvalues of the inverse renormalized propagator at $z = q^2$.

²⁰(56) is similar to the formula postulated for C in [2][3]. Their roles should be accordingly swapped, as already mentioned in the perturbative analysis (see footnote 15).

We generalize this now to the case of three generations by writing the corresponding mixing matrix K^{-1} as a product of three matrices, which reduce, in the unitarity limit, to the basic rotations by $-\theta_{12}$, $-\theta_{23}$ and $-\theta_{13}$ (we are not concerned with CP violation)

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -\tilde{s}_{23} & \tilde{c}_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\tilde{s}_{13} & 0 & \tilde{c}_{13} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -\tilde{s}_{12} & \tilde{c}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (57)$$

We parametrize each basic matrix, which is *a priori* non-unitary, with two angles, respectively $(\theta_{12}, \tilde{\theta}_{12})$, $(\theta_{23}, \tilde{\theta}_{23})$ and $(\theta_{13}, \tilde{\theta}_{13})$ ²¹. We deal accordingly with six mixing angles, instead of three in the unitary case (where $\tilde{\theta}_{ij} = \theta_{ij}$). We will use throughout the paper the notations $s_{ij} = \sin(\theta_{ij})$, $\tilde{s}_{ij} = \sin(\tilde{\theta}_{ij})$, and likewise, for the cosines, $c_{ij} = \cos(\theta_{ij})$, $\tilde{c}_{ij} = \cos(\tilde{\theta}_{ij})$.

To lighten the text, the elements of $(K^{-1})^\dagger K^{-1}$ will be abbreviated by $[ij]$, $i, j = 1 \dots 3$ instead of $((K^{-1})^\dagger K^{-1})_{[ij]}$, and the corresponding neutral current will be noted $\{ij\}$. So, in the quark case, $\{12\}$ stands for $\bar{u}_f \gamma_L^\mu c_f$ or $\bar{d}_f \gamma_L^\mu s_f$, and, in the neutrino case, for $\bar{\nu}_{ef} \gamma_L^\mu \nu_{\mu f}$ or $\bar{e}_f \gamma_L^\mu \mu_f$.

3.3 The unitary approximation

In a first approximation, mixing matrices are unitary, such that neutral currents are very close to being controlled in the renormalized mass basis, too, by the unit matrix. The corresponding equations (unitarization conditions) will determine the equivalent of “classical solutions”, away from which we shall then consider small deviations which exist because of mass splittings: non-degeneracy generates a tiny departure from unitarity of the corresponding mixing matrices and, accordingly, a tiny departure from unity of the matrix controlling neutral currents in bare flavor space.

The unitarization conditions simply express the absence of non-diagonal neutral currents in flavor space, and universality for their diagonal counterparts, assuming that the gauge Lagrangian of neutral currents is controlled in mass space by the unit matrix; they accordingly summarize into

$$(K^{-1})^\dagger K^{-1} = 1. \quad (58)$$

There are five equations: three arise from the absence of non-diagonal neutral currents, and two from the universality of diagonal currents. Accordingly, one degree of freedom is expected to be unconstrained.

3.3.1 Absence of non-diagonal neutral currents of flavor eigenstates

The three conditions read:

²¹So doing, we do not consider the most general non-unitary mixing matrices. All possible phases were included in [2][3], where they have been shown to finally, in the case of two generations, drop out of the final results. There is another reason to ignore them here, specially in the case of three generations (in addition to the point that they would make the equations to solve extremely difficult to handle analytically): such phases can be expected to trigger CP violation, even in the case of two generations. We consider that the corresponding extensive study should be the subject of a separate work. CP violation is not our concern here.

* for the absence of $\{13\}$ and $\{31\}$ currents:

$$[13] = 0 = [31] \Leftrightarrow c_{12} [c_{13}s_{13} - \tilde{c}_{13}\tilde{s}_{13}(\tilde{c}_{23}^2 + s_{23}^2)] - \tilde{c}_{13}\tilde{s}_{12}(c_{23}s_{23} - \tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23}) = 0; \quad (59)$$

* for the absence of $\{23\}$ and $\{32\}$ currents:

$$[23] = 0 = [32] \Leftrightarrow s_{12} [c_{13}s_{13} - \tilde{c}_{13}\tilde{s}_{13}(\tilde{c}_{23}^2 + s_{23}^2)] + \tilde{c}_{13}\tilde{c}_{12}(c_{23}s_{23} - \tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23}) = 0; \quad (60)$$

* for the absence of $\{12\}$ and $\{21\}$ currents:

$$[12] = 0 = [21] \Leftrightarrow s_{12}c_{12}c_{13}^2 - \tilde{s}_{12}\tilde{c}_{12}(c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) + s_{12}c_{12}\tilde{s}_{13}^2(s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2) + \tilde{s}_{13}(s_{12}\tilde{s}_{12} - c_{12}\tilde{c}_{12})(c_{23}s_{23} - \tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23}) = 0. \quad (61)$$

3.3.2 Universality of diagonal neutral currents of flavor eigenstates

The two independent conditions read:

* equality of $\{11\}$ and $\{22\}$ currents:

$$[11] - [22] = 0 \Leftrightarrow (c_{12}^2 - s_{12}^2) [c_{13}^2 + \tilde{s}_{13}^2(s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2)] - (\tilde{c}_{12}^2 - \tilde{s}_{12}^2)(c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) + 2\tilde{s}_{13}(c_{23}s_{23} - \tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23})(c_{12}\tilde{s}_{12} + s_{12}\tilde{c}_{12}) = 0; \quad (62)$$

* equality of $\{22\}$ and $\{33\}$ currents:

$$[22] - [33] = 0 \Leftrightarrow s_{12}^2 + \tilde{c}_{12}^2(c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) - (s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2) + (1 + s_{12}^2) [\tilde{s}_{13}^2(s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2) - s_{13}^2] + 2s_{12}\tilde{s}_{13}\tilde{c}_{12}(\tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23} - c_{23}s_{23}) = 0. \quad (63)$$

The equality of $\{11\}$ and $\{33\}$ currents is of course not an independent condition.

3.4 Solutions for $\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$

In a first step, to ease solving the system of trigonometric equations, we shall study the configuration in which one of the two angles parametrizing the 1-3 mixing vanishes²², which is very close to what is observed experimentally in the quark sector, and likely in the neutrino sector. It turns out, as demonstrated in Appendix A, that the second mixing angle vanishes simultaneously. We accordingly work in the approximation (the sensitivity of the solutions to a small variation of $\theta_{13}, \tilde{\theta}_{13}$ will be studied afterwards)

$$\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}. \quad (64)$$

Eqs. (59), (60), (61), (62) and (63), reduce in this limit to

$$-\tilde{s}_{12}(c_{23}s_{23} - \tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23}) = 0, \quad (65a)$$

$$\tilde{c}_{12}(c_{23}s_{23} - \tilde{c}_{23}\tilde{s}_{23}) = 0, \quad (65b)$$

$$s_{12}c_{12} - \tilde{s}_{12}\tilde{c}_{12}(c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) = 0, \quad (65c)$$

$$(c_{12}^2 - s_{12}^2) - (\tilde{c}_{12}^2 - \tilde{s}_{12}^2)(c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) = 0, \quad (65d)$$

$$s_{12}^2 + \tilde{c}_{12}^2(c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) - (s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2) = 0. \quad (65e)$$

²²By doing so, we exploit the possibility to fix one degree of freedom left *a priori* unconstrained by the five equations; see subsection 6.

It is shown in Appendix B that the only solutions are:

* $\tilde{\theta}_{23} = \theta_{23} + k\pi$ Cabibbo-like, associated with either $\theta_{12} = \tilde{\theta}_{12} + m\pi$ Cabibbo-like or θ_{12} and $\tilde{\theta}_{12}$ maximal;

* $\tilde{\theta}_{12} = \theta_{12} + r\pi$ Cabibbo-like, associated with θ_{23} and $\tilde{\theta}_{23}$ maximal.

Accordingly, the two following sections will respectively start from:

* θ_{12} and θ_{23} Cabibbo-like (and, in a first step, vanishing θ_{13}), which finally leads to a mixing pattern similar to what is observed for quarks;

* θ_{23} maximal and θ_{12} Cabibbo like (and, in a first step, vanishing θ_{13}), which finally leads to a mixing pattern similar to the one observed for neutrinos.

4 The quark sector; constraining the three CKM angles

In this section and in the next one dealing with leptons, we generalize to the case of three generations the empirical criterion which the Cabibbo angle has been shown in [3] to satisfy to a very high precision: for each pair of fermions of the same type, measured mixing angles are such that universality in the space of bare flavor states is verified with the same accuracy as the absence of FCNC's. Mixing matrices connecting bare flavor states to mass states (eigenstates of the full renormalized propagator at its poles) are thus systematically considered to be non-unitary. Indeed, when mass splittings arise, the "unitarization equations" of subsection 3.3 cannot be exactly fulfilled and we investigate the vicinity of their solutions.

We accordingly assume, in agreement with the above criterion, that the product $(K_{u,d}^{-1})^\dagger K_{u,d}^{-1}$ of mixing matrices linking renormalized mass states to bare flavor states is of the form

$$(K_{u,d}^{-1})^\dagger K_{u,d}^{-1} - 1 = \begin{pmatrix} \alpha_{u,d} & \pm(\alpha_{u,d} - \beta_{u,d}) & \pm(\alpha_{u,d} - \gamma_{u,d}) \\ \pm(\alpha_{u,d} - \beta_{u,d}) & \beta_{u,d} & \pm(\beta_{u,d} - \gamma_{u,d}) \\ \pm(\alpha_{u,d} - \gamma_{u,d}) & \pm(\beta_{u,d} - \gamma_{u,d}) & \gamma_{u,d} \end{pmatrix}, \quad (66)$$

where the α 's, β 's and γ 's are now trigonometric functions of the three mixing angles θ_{12} , θ_{23} and θ_{13} .

This assumption we cannot deduce, up to now, from general principles; it is an empirical statement, superimposed to the results of previous sections, which has been found to be successful in the determination of the Cabibbo angle and which we generalize to the case of three generations.

Notice that it is satisfied a mixing matrix equal to the unit matrix (alignment of mass and flavor states) since universality and absence of FCNC's are both fulfilled; accordingly they both undergo identical (vanishing) violations.

4.1 The simplified case $\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$

In the neighborhood of the solution with both θ_{12} and θ_{23} Cabibbo-like, we write

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{12} &= \theta_{12} + \epsilon, \\ \tilde{\theta}_{23} &= \theta_{23} + \eta. \end{aligned} \quad (67)$$

The pattern ($\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$) can be reasonably considered to be close to the experimental situation, at least close enough for trusting not only the relations involving the first and second generation, but also the third one.

Like in [3], we impose that the absence of $\{12\}$, $\{21\}$ neutral currents is violated with the same strength as the universality of $\{11\}$ and $\{22\}$ currents. (65c) and (65d) yield

$$|2\eta s_{12} c_{12} s_{23} c_{23} + \epsilon(c_{12}^2 - s_{12}^2)| = |-2\eta s_{23} c_{23}(c_{12}^2 - s_{12}^2) + 4\epsilon s_{12} c_{12}|. \quad (68)$$

We choose the “+” sign for both sides, such that, for two generations only, the Cabibbo angle satisfies $\tan(2\theta_{12}) = +1/2$. (68) yields the ratio η/ϵ , that we then plug into the condition equivalent to (68) for the (2, 3) channel, coming from (65b)(65e)

$$|\eta c_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2)| = |2\eta s_{23}c_{23}(1 + c_{12}^2) - 2\epsilon s_{12}c_{12}|. \quad (69)$$

(68) and (69) yield

$$\tan(2\theta_{23}) = \frac{c_{12}}{1 + c_{12}^2 - 2s_{12}c_{12} \frac{(s_{12}c_{12} + c_{12}^2 - s_{12}^2)}{4s_{12}c_{12} - (c_{12}^2 - s_{12}^2)}} \approx \frac{c_{12}}{2 - \frac{5}{4} \frac{s_{12}c_{12}}{\tan(2\theta_{12}) - \frac{1}{2}}}. \quad (70)$$

In the r.h.s. of (70), we have assumed that θ_{12} is close to its Cabibbo value $\tan(2\theta_{12}) \approx 1/2$. θ_{23} is seen to vanish with $[\tan(2\theta_{23}) - 1/2]$. The value obtained for θ_{23} is plotted in Fig. 3 as a function of θ_{12} , together with the experimental intervals for θ_{23} and θ_{12} . There are two [11] for θ_{12} ; the first comes from the measures of V_{ud} (black (dark) vertical lines on Fig. 3)

$$V_{ud} \in [0.9735, 0.9740] \Rightarrow \theta_{12} \in [0.2285, 0.2307], \quad (71)$$

and the second from the measures of V_{us} (purple (light) vertical lines on Fig. 3)

$$V_{us} \in [0.2236, 0.2278] \Rightarrow \theta_{12} \in [0.2255, 0.2298]. \quad (72)$$

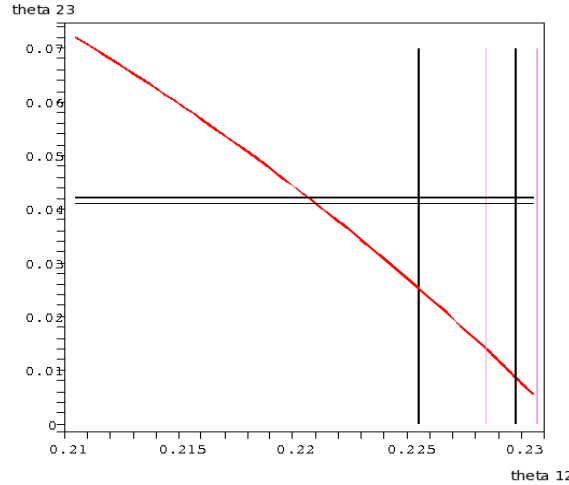


Fig. 3: θ_{23} for quarks as a function of θ_{12} ; simplified case $\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$

The measured value for θ_{23} is seen on Fig. 3 to correspond to $\theta_{12} \approx 0.221$, that is $\cos(\theta_{12}) \approx 0.9757$. The value that we get for $\cos(\theta_{12})$ is accordingly $1.7 \cdot 10^{-3}$ away from the upper limit of the present upper bound for $V_{ud} \equiv c_{12}c_{13}$ [12] [11]; it corresponds to twice the experimental uncertainty. It also corresponds to $\sin(\theta_{12}) = 0.2192$, while $V_{us} \equiv s_{12}c_{13}$ is measured to be $0.2247(19)$ [13] [11]; there, the discrepancy is $2/100$, only slightly above the $1.8/100$ relative width of the experimental interval.

The approximation which sets $\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$ is accordingly reasonable, though it yields results slightly away from experimental bounds. We show in the next subsection that relaxing this approximation gives results in very good agreement with present experiments.

4.2 Going to $(\theta_{13} \neq 0, \tilde{\theta}_{13} \neq 0)$

Considering all angles to be Cabibbo-like with, in addition to (67)

$$\tilde{\theta}_{13} = \theta_{13} + \rho, \quad (73)$$

the l.h.s.'s of eqs. (59),(60),(61), (62), (63) and the sum (62 + 63) depart respectively from zero by

$$\eta c_{13} [s_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + 2s_{13}c_{12}c_{23}s_{23}] - \rho c_{12}(c_{13}^2 - s_{13}^2); \quad (74a)$$

$$\eta c_{13} [-c_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + 2s_{13}s_{12}c_{23}s_{23}] - \rho s_{12}(c_{13}^2 - s_{13}^2); \quad (74b)$$

$$-\epsilon(c_{12}^2 - s_{12}^2) + \eta [s_{13}(c_{23}^2 - s_{23}^2)(c_{12}^2 - s_{12}^2) - 2c_{23}s_{23}c_{12}s_{12}(1 + s_{13}^2)] + 2\rho c_{13}s_{13}c_{12}s_{12}; \quad (74c)$$

$$4\epsilon c_{12}s_{12} + \eta [-4s_{13}s_{12}c_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) - 2c_{23}s_{23}(c_{12}^2 - s_{12}^2)(1 + s_{13}^2)] + 2\rho c_{13}s_{13}(c_{12}^2 - s_{12}^2); \quad (74d)$$

$$-2\epsilon s_{12}c_{12} + \eta [2s_{13}c_{12}s_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + 2c_{23}s_{23}((c_{12}^2 - s_{12}^2) + c_{13}^2(1 + s_{12}^2))] + 2\rho c_{13}s_{13}(1 + s_{12}^2); \quad (74e)$$

$$2\epsilon s_{12}c_{12} + \eta [-2s_{13}c_{12}s_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + 2c_{23}s_{23}(c_{13}^2(1 + c_{12}^2) - (c_{12}^2 - s_{12}^2))] + 2\rho c_{13}s_{13}(1 + c_{12}^2). \quad (74f)$$

We have added (74f), which is not an independent relation, but the sum of (74d) and (74e); it expresses the violation in the universality of diagonal {11} and {33} currents.

4.2.1 A guiding calculation

Before doing the calculation in full generality, and to make a clearer difference with the neutrino case, we first do it in the limit where one neglects terms which are quadratic in the small quantities θ_{13} and ρ . By providing simple intermediate formulæ, it enables in particular to suitably choose the signs which occur in equating the moduli of two quantities. Eqs.(74) become

$$\eta [s_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + 2s_{13}c_{12}c_{23}s_{23}] - \rho c_{12}; \quad (75a)$$

$$\eta [-c_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + 2s_{13}s_{12}c_{23}s_{23}] - \rho s_{12}; \quad (75b)$$

$$-\epsilon(c_{12}^2 - s_{12}^2) + \eta [s_{13}(c_{23}^2 - s_{23}^2)(c_{12}^2 - s_{12}^2) - 2c_{23}s_{23}c_{12}s_{12}]; \quad (75c)$$

$$4\epsilon c_{12}s_{12} - 2\eta [2s_{13}s_{12}c_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + c_{23}s_{23}(c_{12}^2 - s_{12}^2)]; \quad (75d)$$

$$-2\epsilon s_{12}c_{12} + 2\eta [s_{13}c_{12}s_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + c_{23}s_{23}(1 + c_{12}^2)]; \quad (75e)$$

$$2\epsilon s_{12}c_{12} + 2\eta [-s_{13}c_{12}s_{12}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + c_{23}s_{23}(1 + s_{12}^2)]. \quad (75f)$$

The principle of the method is the same as before. From the relation (75c) = -(75d)²³, which expresses that the absence of non-diagonal {12} current is violated with the same strength as the universality of {11} and {22} currents, one gets ϵ/η as a function of $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ ²⁴. This expression is plugged in the relation (75b) = -(75e)²⁵, which expresses the same condition for the (2, 3) channel; from this, one extracts ρ/η as a function of $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ ²⁶. The expressions that have been obtained for ϵ/η and ρ/η are then inserted into the third relation, |(75a)| = |(75f)|, which now corresponds to the (1, 3) channel. This last step yields a relation $F_0(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}) = 1$ between the three angles $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$.

²³The (-) signs ensures that $\tan(2\theta_{12}) \approx (+)1/2$.
²⁴

$$\frac{\epsilon}{\eta} = s_{13}(c_{23}^2 - s_{23}^2) + 2s_{23}c_{23} \frac{s_{12}c_{12} + c_{12}^2 - s_{12}^2}{4c_{12}s_{12} - (c_{12}^2 - s_{12}^2)}; \quad (76)$$

ϵ/η has a pole at $\tan(2\theta_{12}) = 1/2$, the suggested value of the Cabibbo angle for two generations.

²⁵There, again, the (-) sign has to be chosen so as to recover approximately (70).
²⁶

$$\frac{\rho}{\eta} = 2c_{23}s_{23} \left[s_{13} - c_{12} \left(2 \frac{(c_{12}s_{12} + c_{12}^2 - s_{12}^2)}{4s_{12}c_{12} - (c_{12}^2 - s_{12}^2)} - \frac{1 + c_{12}^2}{c_{12}s_{12}} + \frac{1}{s_{12}} \frac{c_{23}^2 - s_{23}^2}{2s_{23}c_{23}} \right) \right]. \quad (77)$$

ρ/η has a pole at $\tan(2\theta_{12}) = 1/2$ and, for $\theta_{13} = 0$, it vanishes, as expected, when θ_{12} and θ_{23} satisfy the relation (70), which has been deduced for $\theta_{13}(\equiv \theta_{13} + \rho) = 0 = \theta_{13}$.

It turns out that $\frac{\partial F_0(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13})}{\partial \theta_{13}} = 0$, such that, in this case, a condition between θ_{12} and θ_{23} alone eventually fulfills the three relations under concern

$$1 = \left| \frac{\text{viol}([11] = [22])}{\text{viol}([12] = 0 = [21])} \right| = \left| \frac{\text{viol}([22] = [33])}{\text{viol}([23] = 0 = [32])} \right| = \left| \frac{\text{viol}([11] = [33])}{\text{viol}([13] = 0 = [31])} \right| \Leftrightarrow \tilde{F}_0(\theta_{12}, \theta_{23}) = 1. \quad (78)$$

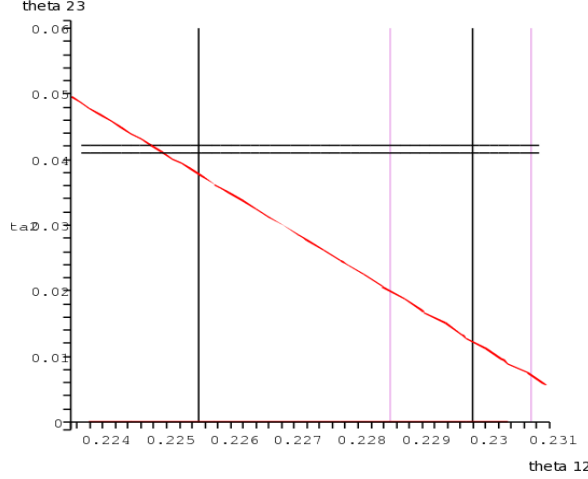


Fig. 4: θ_{23} for quarks as a function of θ_{12} ; neglecting terms quadratic in θ_{13}

θ_{23} is plotted on Fig. 4 as a function of θ_{12} , together with the experimental intervals for θ_{23} (black horizontal lines) and θ_{12} (the intervals for θ_{12} come respectively from V_{ud} (eq. (71), black (dark) vertical lines) and V_{us} (eq. (72)), purple (light) vertical lines).

The precision obtained is much better than in Fig. 3 since, in particular, for θ_{23} within its experimental range, the discrepancy between the value that we get for θ_{12} and its lower experimental limit coming from V_{us} is smaller than the two experimental intervals, and even smaller than their intersection.

4.2.2 The general solution

The principle for solving the general equations (74) is the same as above. One first uses the relation (74c) = (-) (74d) to determine ρ/ϵ in terms of η/ϵ . The result is plugged in the relation (74b) = (-) (74e), which fixes η/ϵ , and thus ρ/ϵ as functions of $(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13})$. These expressions for η/ϵ and ρ/ϵ are finally plugged in the relation $|(74a)| = |(74f)|$, which provides a condition $F(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}) = 1$. When it is fulfilled, the universality of each pair of diagonal neutral currents of mass eigenstates and the absence of the corresponding non-diagonal currents are violated with the same strength, in the three channels (1, 2), (2, 3) and (1, 3).

The results are displayed in Fig. 5; θ_{23} is plotted as a function of θ_{12} for $\theta_{13} = 0, 0.004$ and 0.01 . Like in Figs. 3 and 4, the experimental bounds on θ_{12} are depicted by vertical black (dark) lines for the ones coming from V_{ud} and purple (light) for the ones coming from V_{us} ; the experimental interval for θ_{23} corresponds to the black horizontal lines. The present experimental interval for θ_{13} is [11]

$$V_{ub} = \sin(\theta_{13}) \approx \theta_{13} \in [4 \cdot 10^{-3}, 4.6 \cdot 10^{-3}]. \quad (79)$$

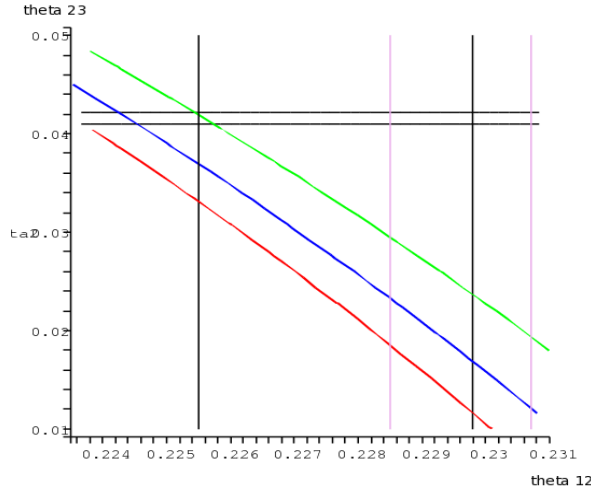


Fig. 5: θ_{23} for quarks as a function of θ_{12} , general case. $\theta_{13} = 0$ (red, bottom), 0.004 (blue, middle) and 0.01 (green, top)

We conclude that:

- * The discrepancy between our results and experiments is smaller than the experimental uncertainty;
- * a slightly larger value of θ_{13} and/or slightly smaller values of θ_{23} and/or θ_{12} still increase the agreement between our results and experimental measurements;
- * the determination of θ_{12} from V_{us} seems preferred to that from V_{ud} .

Another confirmation of the relevance of our criterion is given in the next section concerning neutrino mixing angles.

5 A neutrino-like pattern; quark-lepton complementarity

In the “quark case”, we dealt with three “Cabibbo-like” angles. The configuration that we investigate here is the one in which θ_{23} is, as observed experimentally [11], (close to) maximal, and θ_{12} and θ_{13} are Cabibbo-like (see subsection 3.4). The two cases only differ accordingly from the “classical solutions” of the unitarization equations away from which one makes small variations. The criterion to fix the mixing angles stays otherwise the same.

5.1 The case $\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$

We explore the vicinity of this solution, slightly departing from the corresponding unitary mixing matrix, by considering that $\tilde{\theta}_{12}$ now slightly differs from θ_{12} , and $\tilde{\theta}_{23}$ from its maximal value

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{12} &= \theta_{12} + \epsilon, \\ \theta_{23} = \pi/4 \quad , \quad \tilde{\theta}_{23} &= \theta_{23} + \eta. \end{aligned} \tag{80}$$

The l.h.s.’s of eqs. (59) (60) (61) (62) and (63) no longer vanish, and become respectively

$$-\frac{1}{2}\eta^2(s_{12} + \epsilon c_{12}), \quad (81a)$$

$$\frac{1}{2}\eta^2(c_{12} - \epsilon s_{12}), \quad (81b)$$

$$(*) - \eta s_{12} c_{12} + \epsilon(s_{12}^2 - c_{12}^2)(1 + \eta), \quad (81c)$$

$$(*) - \eta(c_{12}^2 - s_{12}^2) + 4\epsilon s_{12} c_{12}(1 + \eta), \quad (81d)$$

$$\eta(1 + c_{12}^2) - 2\epsilon s_{12} c_{12}(1 + \eta), \quad (81e)$$

showing by which amount the five conditions under scrutiny are now violated. Some care has to be taken concerning the accurateness of equations (81). Indeed, we imposed a value of θ_{13} which is probably not the physical one (even if close to). It is then reasonable to consider that channel (1, 2) is the less sensitive to this approximation and that, accordingly, of the five equations above, (81c) and (81d), marked with an “*”, are the most accurate ²⁷.

The question: is there a special value of $\theta_{12} = \tilde{\theta}_{12}$ Cabibbo-like for which small deviations (ϵ, η) from unitarity entail equal strength violations of

- * the absence of $\{12\}, \{21\}$ non-diagonal neutral currents;
- * the universality of $\{11\}$ and $\{22\}$ neutral currents ?

gets then a simple answer

$$s_{12} c_{12} = c_{12}^2 - s_{12}^2 \Rightarrow \tan(2\theta_{12}) = 2. \quad (82)$$

We did not take into account the terms proportional to ϵ because we assumed that the mass splittings between the first and second generations (from which the lack of unitarity originates) are much smaller than the ones between the second and the third generation ²⁸.

In the case of two generations, only ϵ appears, and one immediately recovers from (81c) and (81d) the condition fixing $\tan(2\theta_c) = 1/2$ for the Cabibbo angle.

Accordingly, the same type of requirement that led to a value of the Cabibbo angle for two generations very close to the observed value leads, for three generations, to a value of the first mixing angle satisfying the quark-lepton complementarity relation (3) [8].

The values of θ_{12} and θ_{23} determined through this procedure are very close to the observed neutrino mixing angles [11] [15].

Though we only considered the two equations that are *a priori* the least sensitive to our choice of a vanishing third mixing angle (which is not yet confirmed experimentally), it is instructive to investigate the sensitivity of our solution to a small non-vanishing value of θ_{13} . This is done in Appendix C in which, for this purpose, we made the simplification $\tilde{\theta}_{13} \approx \theta_{13}$. It turns out that the terms proportional to s_{13} in the two equations $[12] = 0 = [21]$ and $|[11]| = |[22]|$ are also proportional to $(c_{23}^2 - s_{23}^2)$, such that our solution with θ_{23} maximal is very stable with respect to a variation of θ_{13} around zero. This may of course not be the case for the other three equations, which are expected to be more sensitive to the value of θ_{13} .

²⁷The limitation of this approximation also appears in the fact that (81b), of second order in η , is not compatible with (81e), which is of first order.

²⁸Since the three angles play *a priori* symmetric roles, the simultaneous vanishing of θ and $\tilde{\theta}$, which we demonstrated for θ_{13} and $\tilde{\theta}_{13}$ (see Appendix A), should also occur for the other angles. Two competing effects accordingly contribute to the magnitude of the parameters $\epsilon, \eta \dots$: on one hand, they can be made, by renormalization, to vanish, in one of the two sectors, with the corresponding θ (see subsection 2.1.2), and, on the other hand, one reasonably expects them to increase with the mass splitting between the fermions mixed by this θ . So, in the quark sector, that the violation of unitarity should be the largest for θ_{13} (since it corresponds to the largest mass splitting) is not guaranteed since the corresponding mixing angle is also very small (as expected from hierarchical mixing matrices [14]). A detailed investigation of this phenomenon is postponed to a further work. In the neutrino sector, however, since θ_{23} is maximal (large), the assumption that the mass splitting between the second and third generation is larger than between the first and second is enough to guarantee $\epsilon \ll \eta$.

5.2 Solutions for the angle θ_{13}

We now consider, like we did for quarks, the general case $\theta_{13} \neq 0 \neq \tilde{\theta}_{13}(\rho \neq 0)$, $\tilde{\theta}_{12} \neq \theta_{12}(\epsilon \neq 0)$, $\tilde{\theta}_{23} \neq \theta_{23}(\eta \neq 0)$, while assigning to θ_{12} and θ_{23} their values obtained in subsection 5.1.

We investigate the eight different relations between θ_{12} , θ_{23} and θ_{13} which originate from the $2 \times 2 \times 2$ possible sign combinations in the conditions (78) (the r.h.s. is now replaced by a condition $F(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}) = 1$ involving the three mixing angles), where each modulus can be alternatively replaced by “+” or “-”.

Among the solutions found for θ_{13} , only two (up to a sign) satisfy the very loose experimental bound

$$\sin^2(\theta_{13}) \leq 0.1. \quad (83)$$

They correspond respectively to the sign combinations $(+/-/-)$, $(+/+/+)$, $(-/+/+)$ and $(-/-/-)$

$$\begin{aligned} \theta_{13} &= \pm 0.2717 \quad , \quad \sin^2(\theta_{13}) = 0.072, \\ \theta_{13} &= \pm 5.7 \cdot 10^{-3} \quad , \quad \sin^2(\theta_{13}) = 3.3 \cdot 10^{-5}. \end{aligned} \quad (84)$$

The most recent experimental bounds can be found in [15]. They read

$$\sin^2(\theta_{13}) \leq 0.05, \quad (85)$$

which only leaves the smallest solution in (84)²⁹. Future experiments will confirm, or infirm, for neutrinos, the properties that we have shown to be satisfied with an impressive accuracy by quark mixing angles.

6 Flavor transformations

Up to now, the observed “pattern” of flavor mixing has been disconnected from flavor symmetries. It has instead been connected with a precise scheme of departure from unitarity of the matrix controlling gauge neutral currents in bare flavor space. This contrasts with most approaches which, first, focus on mass matrices rather than gauge currents, secondly try to induce precise forms of the latter from horizontal symmetries [6]. The goal of this section is to (start to) span a bridge between the two. We shall investigate unitary flavor transformations, while restricting, for the sake of simplicity, to the case of two flavors, in which symmetry patterns are more conspicuous (the presence of a third generation has been seen, for example, to only lightly affect the Cabibbo angle).

The most natural unitary flavor group to be investigated is then $U(2)_f$, or $U(1)_f \times SU(2)_f$. For degenerate systems, this is a symmetry group of the Lagrangian. As soon as the degeneracy is lifted, it is no longer so, though an arbitrary unitary transformation on fermions should not change “physics” *i.e.* the physical masses and mixing angles. This last property means that unitary flavor transformations have to be considered from two points of view: on one side, we will check that physical mixing angles do not change when fermions are transformed, in particular that the process of renormalization by the finite counterterms of Shabalin goes also unaltered in the transformation, and, on the other side, we will investigate which changes they induce on the (different parts of) the Lagrangian, and how their breaking can eventually be associated with the pattern of neutral currents that seemingly controls mixing angles observed in nature.

For non-degenerate masses, the explicit form for the matrix $((C^{-1})^\dagger C^{-1})$ controlling neutral currents in the basis of bare flavor states, that has been obtained in section 2.1) (see (23,25)), provides an “orientation” of the relevant $SU(2)_f$ with respect to the trivial one (the one having the Pauli matrices as generators), which depends on the mixing angle θ : there arises the generator $T_z(u)$, where $u = \tan 2\theta$. A trivial invariance of the effective Lagrangian of gauge neutral currents by transformation $e^{i(\alpha + \beta_z T_z(u))}$

²⁹These values substantially differ from the ones in [16], which mainly focuses on special textures for the product of the quark and neutrino mixing matrices [17].

follows, which is broken for charged currents (unless the (d, s) and (u, c) sectors undergo identical transformations).

We then study possible connections between mass matrices and gauge neutral currents. We start by the simple case of a constant (symmetric) mass matrix. A link with neutral currents rapidly appears because, apart from trivial terms proportional to the unit matrix, the mass matrix is deduced from $(C^{-1})^\dagger C^{-1}$ by a translation $\theta \rightarrow \theta - \pi/4$ of the mixing angle. The departure of the mass matrix from (a term proportional to) unity is then represented by the \mathcal{T}_x generator of the rotated $SU(2)_f(u)$ mentioned above. The commutator $\mathcal{T}_y = [\mathcal{T}_z, \mathcal{T}_x]$ is the standard Pauli matrix, independent of the mixing angle,

In a short paragraph, we single out a special invariance of both (non-trivial parts of) neutral currents and mass terms by the orthogonal, hermitian but non unitary transformations $e^{\alpha \mathcal{T}_y}$ (it is not a symmetry of the whole Lagrangian).

Then, we study general 2×2 unitary transformations on fermions. We demonstrate, through various steps, that these transformations go across Shabalin's finite renormalization and finally leave unchanged the renormalized mixing angles. Flavor rotations, equivalent to $e^{i\alpha \mathcal{T}_y}$ transformations appear of special relevance. They are shown to continuously rotate neutral currents into mass terms and to preserve their group structure. As far as charged currents are concerned, their group structure only stays unchanged when the same rotation is performed in the (u, c) and (d, s) sectors. It then occurs that mass and flavor eigenstates can only be aligned in one of the two sectors. The mixing angle of the non-aligned sector becomes then identical to the Cabibbo angle occurring in charged currents. In this framework, as commented upon more at length in subsection 7.2, flavor rotations appear as a very mildly broken flavor subgroup of the electroweak Standard Model.

Last, we generalize this result to the renormalized mass matrix (fermionic self-energy). Its dependence on q^2 leads, like in the general argumentation of QFT used in [2], to the presence of an orthonormal basis of eigenstates for each value of q^2 , containing one at most among the physical mass eigenstates. Accordingly, one reaches the same conclusion concerning the non-unitarity *a priori* of mixing matrices. The Ward identity that connects the vertex function at zero external momentum to the derivative of the inverse propagator requires that the two sides of the identity be invariant by the same transformation $e^{i(\alpha+\beta_z \mathcal{T}_z(u))}$ mentioned above. This yields a constraint that we propose to adopt because it guarantees that (q^2 dependent) neutral currents and the fermionic self energy keep the same structure as that encountered in the case of a constant mass matrix; they are in particular, again, continuously transformed into each other by flavor rotations. The resulting expressions are in particular, unlike textures, stable by these transformations.

6.1 A first type of horizontal symmetries

We exhibit below specific flavor transformations that leave parts of the gauge electroweak Lagrangian invariant. We deal with the case of two generations, which makes an easy link with [3], and consider for example the (d, s) channel. The corresponding neutral currents in the basis of bare flavor eigenstates are controlled by the product $(\mathcal{C}_d^{-1})^\dagger \mathcal{C}_d^{-1}$.

When \mathcal{C}_d departs from unitarity, parametrizing (see (23), in which the role of A_d is now played by ϵ_d)

$$\mathcal{C}_d^{-1}(\theta_d) = \begin{pmatrix} \cos \theta_d & \sin \theta_d \\ -\sin \theta_d - \epsilon_d \cos \theta_d & \cos \theta_d - \epsilon_d \sin \theta_d \end{pmatrix}, \quad (86)$$

one gets:

$$(\mathcal{C}_d^{-1})^\dagger(\theta_d) \mathcal{C}_d^{-1}(\theta_d) = 1 + 2\epsilon_d \mathcal{T}_z(\theta_d), \quad (87)$$

where the expression for \mathcal{T}_z has been given in (47). Whatever be θ_d , the unitary transformation

$$\Omega_z(\alpha_d, \beta_d, \theta_d) = e^{i(\alpha_d + \beta_d \mathcal{T}_z(\theta_d))} \quad (88)$$

with arbitrary α_d and β_d , acting on $\begin{pmatrix} d_f \\ s_f \end{pmatrix}$, satisfies

$$\Omega_z^\dagger(\alpha_d, \beta_d, \theta_d) \left[(\mathcal{C}_d^{-1})^\dagger(\theta_d) \mathcal{C}_d^{-1}(\theta_d) \right] \Omega_z(\alpha_d, \beta_d, \theta_d) = (\mathcal{C}_d^{-1})^\dagger(\theta_d) \mathcal{C}_d^{-1}(\theta_d), \quad (89)$$

and, thus, leaves invariant Lagrangian for gauge neutral currents

$$\begin{pmatrix} \bar{d}_f & \bar{s}_f \end{pmatrix} W_\mu^3 \gamma_L^\mu \left[(\mathcal{C}_d^{-1})^\dagger(\theta_d) \mathcal{C}_d^{-1}(\theta_d) \right] \begin{pmatrix} d_f \\ s_f \end{pmatrix}. \quad (90)$$

It is accordingly a horizontal group of invariance of the gauge Lagrangian for neutral currents in the space of bare flavor states³⁰.

As can be seen on (46), such transformations $\begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \rightarrow e^{i(\alpha_d + \beta_d T_z(\theta_d))} \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} u_{fL} \\ c_{fL} \end{pmatrix} \rightarrow e^{i(\alpha_u + \beta_u T_z(\theta_u))} \begin{pmatrix} u_{fL} \\ c_{fL} \end{pmatrix}$, acting independently in the (u, c) and (d, s) sectors (with different parameters) do not leave the gauge charged currents invariant.

A special invariance of the non-trivial parts of both neutral gauge currents and mass terms by a non-unitary transformation will also be exhibited in subsection 6.2.2.

6.2 Gauge currents versus mass matrices

In this work, the determination of mixing angles has been disconnected from the knowledge and / or assumptions concerning mass matrices, *e.g.* textures. In addition to the fact, already mentioned, that

³⁰Things become clearer in the proper basis of Ω_z , which is also the one of $T_z(\theta_d)$. The eigenvectors are

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{1 + \sin 2\theta_d} \\ \sqrt{1 - \sin 2\theta_d} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \sin 2\theta_d} \\ \sqrt{1 + \sin 2\theta_d} \end{pmatrix} \quad (91)$$

and the diagonalized $T_z(\theta_d)$ is

$$\Delta_{T_z} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = T^3. \quad (92)$$

Accordingly, in the proper (θ_d dependent) basis, the horizontal group of invariance is

$$\Omega(\alpha_d, \beta_d) = e^{i(\alpha_d + \beta_d T^3)}, \quad (93)$$

that is, up to an arbitrary phase, a $U(1)$ transformation by the T^3 subgroup of the horizontal $SU(2)_f$ symmetry associated to the triplet of neutral currents in the (d, s) channel.

It is instructive to express the proper basis $\begin{pmatrix} d_p \\ s_p \end{pmatrix}$ of $(\mathcal{C}_d^{-1})^\dagger \mathcal{C}_d^{-1}$, $T_z(\theta_d)$, and Ω_z in terms of the mass basis

$$\begin{pmatrix} d_p \\ s_p \end{pmatrix} = P_d^\dagger \begin{pmatrix} d_f \\ s_f \end{pmatrix} = P_d^\dagger \mathcal{C}_d \begin{pmatrix} d_m \\ s_m \end{pmatrix}, \quad (94)$$

P_d being the unitary matrix the columns of which are the eigenvectors (91). While \mathcal{C}_d is, up to ϵ_d , a rotation by $(-\theta_d)$ (see (86)), the angle ζ_d of rotation of P_d^\dagger satisfies $\tan \zeta_d = -\sqrt{1 - \sin 2\theta_d} / \sqrt{1 + \sin 2\theta_d} \Leftrightarrow \tan 2\zeta_d = \pm 1 / \tan 2\theta_d$. So, $\zeta_d = \frac{\pi}{4} - \theta_d + \frac{n\pi}{2}$ or $\zeta_d = \theta_d + \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$. Accordingly, $P_d^\dagger \mathcal{C}_d$ is, up to ϵ_d , either a rotation of $\frac{\pi}{4} - 2\theta_d + \frac{n\pi}{2}$ or a rotation of $\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$. The last case is specially interesting, in which the proper basis is, up to ϵ_d corrections, deduced from the mass basis by a rotation close to $\pi/4$; in the proper basis, the neutral currents become controlled by $1 + \epsilon_d \Delta_{T_d} = 1 + \epsilon_d T^3$. The parameter ϵ_d measuring the lack of unitarity, by “fixing” a proper basis (91) which is independent of its own value (ϵ_d can be arbitrarily small), assigns, even for Cabibbo like angles, a special role to the maximal mixing. In the proper basis, neutral currents are, like in the mass basis (assumed) and in the flavor basis (requested), controlled by a matrix close to unity; its departure from unity, proportional to ϵ_d , makes appear the generator (T^3 for 2 generations) of the unbroken horizontal flavor $U(1)$.

a single constant mass matrix cannot account for the properties of coupled systems in QFT [7][9], the limitations of putting the emphasis on mass matrices have already often been stressed. Textures are unstable by unitary transformations on fermions and cannot represent genuine physical properties of the system under consideration. In [18] it was explicitly shown how one can obtain, for example, bi-maximal mixing matrices without Dirac mass matrices playing any role. On these grounds, this last work casts serious doubts on the relevance of the Quark-Lepton Complementarity relation, which does not rely on “invariant” relations and quantities. That the Golden ratio can be recovered from special textures (see for example [10]) can thus only be considered as a special case of some more general properties.

It is noticeable that the way we obtained these two properties stays independent of any assumption concerning mass matrices, since the remarkable properties at work concern gauge currents.

The problem that comes to mind is clearly whether a bridge can be spanned between gauge currents and some class of mass matrices. We just make a few remarks below; in a first step we shall consider a (abusively) single constant mass matrix; then, we will consider renormalized, q^2 dependent, mass matrices.

6.2.1 The case of a constant mass matrix

We have demonstrated in subsection 2.1 that non-unitary mixing matrices arise in the diagonalization of renormalized kinetic terms; this does not depend on the form of the classical mass matrix M_0 . We consider, in a first step, the simple case of a binary system endowed with a real symmetric mass matrix

$$M_0 = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}. \quad (95)$$

Calling m_1 and m_2 its eigenvalues, one can re-parametrize

$$\begin{aligned} M_0 &= m + \Delta m \mathcal{T}_x(\theta), \quad \mathcal{T}_x(\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}, \\ m &= \frac{m_1 + m_2}{2}, \quad \Delta m = m_1 - m_2, \end{aligned} \quad (96)$$

where θ is the (classical) mixing angle arising from the diagonalization of M_0 . It satisfies

$$\tan 2\theta = \frac{2c}{a-b}. \quad (97)$$

That a given mixing angle can be related to infinitely many different mass patterns clearly appears since, for example, shifting M by $\kappa \times$ the unit matrix does not change the mixing angle, does not change Δm either and shifts each individual eigenvalue by κ . In particular, a value of κ much larger than $m_{1,2}$ leads to a quasi-degenerate binary system, the mixing angle of which stays nevertheless the same since $\tan 2\theta = 2c/\sqrt{(\Delta m)^2 - 4c^2}$ is unchanged. Also, two mass matrices proportional to each other have the same mixing angle though their eigenvalues have the same proportionality factor (mass ratios keep the same in this case)³¹. Trying to explain a given mixing pattern by a specific mass matrix is thus illusory because it cannot tackle the problem in its generality.

Shifting M_0 by a constant is a particular one among the transformations that leave the r.h.s. of (97) unchanged, *i.e.* the ones such that $\frac{2c}{a-b} = \text{cst}$. The set $\{\Theta(u)\}$ of such matrices

$$\Theta(u) = \begin{pmatrix} a & \frac{u}{2}(a-b) \\ \frac{u}{2}(a-b) & b \end{pmatrix} = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & -1 \end{pmatrix} \quad (98)$$

³¹ Any homographic transformation on a mass matrix M : $M \rightarrow \frac{\alpha M + \beta}{\delta M + \gamma}$ preserves the eigenvectors of M and thus the mixing angles.

form, for any given u , a real abelian group, spanned by the two matrices 1 and $\frac{1}{2\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & -1 \end{pmatrix}$.

Interesting connections can be obtained as follows. (87) rewrites (recall that ϵ identifies with Shabalin's A finite counterterms, and \mathcal{T}_z has been defined in (47))

$$(C^{-1})^\dagger C^{-1} - 1 = 2\epsilon \mathcal{T}_z(\theta), \quad \mathcal{T}_z(\theta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin 2\theta & -\cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \end{pmatrix}, \quad (99)$$

where θ is the same classical mixing angle as the one that appears in (96). Comparing (99) with (96), one gets:

$$\frac{(C^{-1})^\dagger C^{-1} - 1}{2\epsilon}(\theta) = \frac{M_0 - m}{\Delta m}(\theta - \pi/4). \quad (100)$$

It then appears natural to consider the three $SU(2)_f(u)$ generators (anticommuting matrices with eigenvalues $\pm 1/2$)

$$\mathcal{T}_x(u) = \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_z(u) = \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} u & -1 \\ -1 & -u \end{pmatrix}, \quad (101)$$

such that, parametrizing ³²

$$\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}, \quad \sin 2\theta = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}, \quad (102)$$

one has, like in (96) and (99)

$$\begin{aligned} M_0 &= m + \Delta m \mathcal{T}_x(u), \\ (C^{-1})^\dagger C^{-1} &= 1 + 2\epsilon \mathcal{T}_z(u). \end{aligned} \quad (103)$$

The $\vec{\mathcal{T}}$'s are related to the standard $SU(2)$ generators \vec{T} defined in (49) by

$$\begin{pmatrix} \mathcal{T}_x(u) \\ \mathcal{T}_z(u) \end{pmatrix} = R(u) \begin{pmatrix} T_x \\ T_z \end{pmatrix}, \quad R(u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} u & 1 \\ -1 & u \end{pmatrix}; \quad R^T(u)R(u) = 1. \quad (104)$$

“Mass terms” and neutral currents are transformed into one another by the action of

$$e^{i\gamma \mathcal{T}_y} = \cos \frac{\gamma}{2} + 2i\mathcal{T}_y \sin \frac{\gamma}{2} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & \sin \frac{\gamma}{2} \\ -\sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix}. \quad (105)$$

Indeed,

$$\begin{pmatrix} e^{-i\gamma \mathcal{T}_y} \mathcal{T}_x(u) e^{i\gamma \mathcal{T}_y} \\ e^{-i\gamma \mathcal{T}_y} \mathcal{T}_z(u) e^{i\gamma \mathcal{T}_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{T}_x(u) \\ \mathcal{T}_z(u) \end{pmatrix}, \quad (106)$$

which we rewrite ³³

$$\begin{aligned} e^{-i\gamma \mathcal{T}_y} M_0 e^{i\gamma \mathcal{T}_y} &= m + \Delta m (\mathcal{T}_x(u) \cos \gamma - \mathcal{T}_z(u) \sin \gamma) \approx (m + \Delta m \mathcal{T}_x(u)) - \gamma \Delta m \mathcal{T}_z(u) \\ &= M_0 - \gamma \frac{\Delta m}{2\epsilon} ((C^{-1})^\dagger C^{-1} - 1), \\ e^{-i\gamma \mathcal{T}_y} (C^{-1})^\dagger C^{-1} e^{i\gamma \mathcal{T}_y} &= 1 + 2\epsilon (\mathcal{T}_x(u) \sin \gamma + \mathcal{T}_z(u) \cos \gamma) \approx (1 + 2\epsilon \mathcal{T}_z(u)) + 2\epsilon \gamma \mathcal{T}_x(u) \\ &= (C^{-1})^\dagger C^{-1} + \gamma \frac{2\epsilon}{\Delta m} (M_0 - m), \end{aligned} \quad (107)$$

(107) entail in particular that a symmetric matrix for $(C^{-1})^\dagger C^{-1}$, as one naturally gets, can only transform into a symmetric mass matrix M by $e^{i\gamma \mathcal{T}_y}$ (one usually assumes, using for example the polar decomposition theorem, that the mass matrix can always be taken as hermitian, since the left over unitary matrix can always be reabsorbed in the right handed fermions, which are not coupled. This becomes however untrue with radiative corrections since, at two-loops, for massive fermions, right-handed currents start *a priori* to occur.)

³²For $u \equiv \tan 2\theta$ to be continuous, we have to restrict, for example, θ to the interval $]-\pi/4, +\pi/4[$.

³³In terms of neutral currents and mass terms, one has

$$\begin{pmatrix} \hat{T}_x(u) \\ \hat{T}_z(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma \\ \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_x(u) \\ T_z(u) \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_{x,z}(u) = e^{-i\gamma T_y} T_{x,z}(u) e^{i\gamma T_y}. \quad (108)$$

Comparing (105) and (108) shows that $e^{i\gamma T_y}$, which shifts θ by $\gamma/2$, rotates fermions by $\gamma/2$, but rotates the $T_x(u)$ and $T_z(u)$ generators by $(-\gamma)$. In particular, when rotating the fermions by $\pi/4$, *i.e.* taking $\gamma = \pi/2$, $T_x(u) \rightarrow -T_z(u)$, $T_z(u) \rightarrow T_x(u)$.

Combining with (104), one finds

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{T}_x(u) \\ \hat{T}_z(u) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin(\gamma + 2\theta) & \cos(\gamma + 2\theta) \\ -\cos(\gamma + 2\theta) & \sin(\gamma + 2\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_x \\ T_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\gamma + 2\theta - \frac{\pi}{2}) & -\sin(\gamma + 2\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\gamma + 2\theta - \frac{\pi}{2}) & \cos(\gamma + 2\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_x \\ T_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i(2\theta + \gamma - \frac{\pi}{2})T_y} T_x & e^{i(2\theta + \gamma - \frac{\pi}{2})T_y} \\ e^{-i(2\theta + \gamma - \frac{\pi}{2})T_y} T_z & e^{i(2\theta + \gamma - \frac{\pi}{2})T_y} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (109)$$

The rotation matrix occurring is exactly of the same type as $R(u)$ occurring in (104), with its argument shifted from 2θ to $2\theta + \gamma$. (104) rewrites in particular

$$\begin{pmatrix} T_x(u) \\ T_y \\ T_z(u) \end{pmatrix} = e^{-2i(\theta - \frac{\pi}{4})T_y} \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix} e^{2i(\theta - \frac{\pi}{4})T_y}. \quad (110)$$

(101) shows that one recovers the standard $SU(2)$ generators T_x, T_y, T_z at the limit $u \rightarrow +\infty$ ($\theta \rightarrow \pi/4$); when $u \rightarrow -\infty$ ($\theta \rightarrow -\pi/4$), $T_{x,z} \rightarrow -T_{x,z}$; at the limit $u \rightarrow 0$ ($\theta = 0$), $T_x(u) \rightarrow T_z$, $T_z(u) \rightarrow -T_x$.

By the transformation (isomorphic to Z_2) $u \rightarrow -1/u$, $T_x(u) \rightarrow T_z(u)$, $T_z(u) \rightarrow -T_x(u)$. It corresponds to the transformation $\tan 2\theta \rightarrow -1/\tan 2\theta$, which is an outer automorphism of the $SU(2) \times U(1)$ (or $U(2)$) algebra under scrutiny. One can also speak of an infinite set of $SU(2)_f$, depending of the continuous parameter u . This set is divided by the transformation $u \rightarrow -1/u$ into two subsets, respectively with generators $\{T_x(u), T_y, T_z(u)\}$ and $\{T_z(u), T_y, -T_x(u)\}$. They intersect along the $U(1)$ group with generator T_y , which is independent of u .

6.2.2 A special invariance

In subsection 6.1, we encountered the unitary transformations Ω_z which leave invariant the Lagrangian of neutral currents. Likewise, we can define transformations $\Omega_x = e^{i(\alpha + \beta T_x(\theta))}$, which, due to (96), leave mass terms invariant. None is a symmetry of both terms: neutral currents are not invariant by Ω_x , nor are mass terms by Ω_z .

There exist a special invariance satisfied by the non-trivial parts of the mass matrix and of neutral currents, which results from the anticommutation of T_y with T_x and T_z . Both $\frac{M_0 - m}{\Delta m}$ and $\frac{(C^{-1})^\dagger C^{-1} - 1}{2\epsilon}$ satisfy

$$O^\dagger \frac{M_0 - m}{\Delta m} O = \frac{M_0 - m}{\Delta m}, \quad O^\dagger \frac{(C^{-1})^\dagger C^{-1} - 1}{2\epsilon} O = \frac{(C^{-1})^\dagger C^{-1} - 1}{2\epsilon}, \quad (111)$$

where O is the orthogonal matrix depending on an arbitrary real parameter α

$$O = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & -i \sinh \alpha \\ i \sinh \alpha & \cosh \alpha \end{pmatrix} \equiv e^{i\alpha \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}} = e^{2\alpha T_y}, \quad OO^T = 1, \quad O^\dagger O \neq 1. \quad (112)$$

This transformation is non-unitary, such that the trivial parts of the matrices for mass and neutral currents (the ones proportional to the unit matrix) are not invariant.

It is also noticeable that the corresponding parts of the Lagrangian are *not* invariant by the unitary $U(1)$ rotation \tilde{O} obtained by going to imaginary α . At the opposite, the trivial parts of the corresponding mass terms and gauge neutral currents, which are not invariant by O , are invariant by \tilde{O} .

6.2.3 Unitary transformations on fermions

Δm (mass splitting) and 2ϵ (lack of unitarity of the mixing matrix) cannot be but tightly connected; they are in particular expected to vanish simultaneously. When both vanish, the mixing angle is undetermined: mass terms, proportional to the unit matrix, are trivially invariant by the $SU(2)_f(u) \times U(1)_f$ flavor symmetry; so are the terms corresponding to neutral currents in the gauge Lagrangian.

As soon as the degeneracy is lifted, this symmetry is broken: mass terms and neutral currents are no longer invariant. However, it is the common belief that “physics” should not depend on arbitrary unitary flavor transformations on the fermion fields. So, on one side, we will check this point and, on the other side, we will study how different parts of the Lagrangian transform, putting a special emphasis on flavor rotations.

Flavor rotations

According to (105), they are strictly equivalent (up to a phase) to transformations $\Omega_y = e^{i(\alpha + \beta T_y(\theta))}$. We consider

$$\begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \rightarrow R_\varphi \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}, \quad R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (113)$$

which is equivalent to a transformation $e^{2i\varphi T_y}$.

Concerning mass terms and neutral currents (in the original (bare) flavor basis), they respectively transform according to (see (99) and (96))

$$\begin{aligned} R_\varphi^\dagger T_x(u) R_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos 2(\theta + \varphi) & \sin 2(\theta + \varphi) \\ \sin 2(\theta + \varphi) & -\cos 2(\theta + \varphi) \end{pmatrix}, \\ R_\varphi^\dagger T_z(u) R_\varphi &= \begin{pmatrix} \sin 2(\theta + \varphi) & -\cos 2(\theta + \varphi) \\ -\cos 2(\theta + \varphi) & -\sin 2(\theta + \varphi) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (114)$$

which consistently shifts the angle $\theta \rightarrow \theta + \varphi$. Such transformations, in particular, rotate continuously mass terms into neutral currents (see also (108)).

To ascertain that they “do not change physics” (given that they are obviously not symmetries of the Lagrangian), we must check that physical mixing angles are not changed by such transformations, in particular the Cabibbo angle occurring in charged currents of renormalized mass states. We accordingly consider (113) acting on (d_{fL}, s_{fL}) , together with

$$\begin{pmatrix} u_{fL} \\ c_{fL} \end{pmatrix} \rightarrow R_\vartheta \begin{pmatrix} u_{fL} \\ c_{fL} \end{pmatrix}, \quad R_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad (115)$$

By the unitary $R_{\vartheta, \varphi}$, the (u, c) classical mass matrix is left-multiplied by R_ϑ^\dagger and the (d, s) one by R_φ^\dagger . In the diagonalization process by a bi-unitary transformation, the unitary matrices \mathcal{C}_{d0} and \mathcal{C}_{u0} (see subsection 2.1) have simply to be changed into $\hat{\mathcal{C}}_{u0} = R_\vartheta^\dagger \mathcal{C}_{u0}$ and $\hat{\mathcal{C}}_{d0} = R_\varphi^\dagger \mathcal{C}_{d0}$ (in this simple case of rotations, the classical angles linking the original flavor states to the new mass states have become

$\hat{\theta}_{uL} = \theta_{uL} + \vartheta$, $\hat{\theta}_{dL} = \theta_{dL} + \varphi$ ³⁴). So doing, the bare masses stay the same. The new classical mass eigenstates are $\begin{pmatrix} \hat{u}_{m0} \\ \hat{c}_{m0} \end{pmatrix} = C_{u0}^\dagger R_\vartheta \begin{pmatrix} u_{fL} \\ c_{fL} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \hat{d}_{m0} \\ \hat{s}_{m0} \end{pmatrix} = C_{d0}^\dagger R_\varphi \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}$; they are deduced from the original ones by the transformations $C_{u0}^\dagger R_\vartheta C_{u0} \equiv R_\vartheta$ and $C_{d0}^\dagger R_\varphi C_{d0} \equiv R_\varphi$. By the action of R_ϑ and R_φ , the classical charged currents Lagrangian has become $\begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} R_\vartheta^\dagger W_L R_\varphi \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}$, which writes in terms on the new classical mass eigenstates as

$$\begin{pmatrix} \overline{\hat{u}_{m0}} & \overline{\hat{c}_{m0}} \end{pmatrix} C_{u0}^\dagger R_\vartheta R_\vartheta^\dagger W_L R_\varphi R_\varphi^\dagger C_{d0} \begin{pmatrix} \hat{d}_{m0} \\ \hat{s}_{m0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\hat{u}_{m0}} & \overline{\hat{c}_{m0}} \end{pmatrix} C_{u0}^\dagger W_L C_{d0} \begin{pmatrix} \hat{d}_{m0} \\ \hat{s}_{m0} \end{pmatrix} \quad (\text{we used the}$$

unitarity of R_ϑ and R_φ). So, at the classical level, the mixing (Cabibbo) matrix occurring in charged currents is unchanged. This means that, in the equivalent of (37), involving the new classical mass eigenstates defined above, C_0 is formally unchanged and so are the $SU(2)_L$ generators. This is precisely the ingredients which are used to calculate Shabalin's counterterms. So, in the new classical mass basis, the A, B, D 's are unchanged. This entails that the renormalized matrix \mathcal{C} expressed by (38) is also unchanged. The last step is to go to the basis of the new renormalized mass eigenstates $\hat{\xi}$. Since the A Shabalin's counterterms are unchanged, so are, formally, the matrices $\mathcal{V}_{u,d}$ (see (10)), which still depend on arbitrary angles φ_{Lu} and φ_{Ld} . Since Shabalin's counterterms B and D are unchanged, so are the unitary matrices $V_{u,d}$ and $U_{u,d}$. Since C_{d0} and C_{u0} have been changed (see above), so have \mathcal{C}_d and \mathcal{C}_u (see (20)), in which θ_{dL} and θ_{uL} are now also shifted by φ and ϑ (see also (116) below). Let us keep as before $\varphi_{Lu} + \theta_{2Lu} = 0 = \varphi_{Ld} + \theta_{2Ld}$; $\mathcal{V}_d V_d$, which does not depend on θ_{dL} , stays unchanged (and so does $\mathcal{V}_u V_u$). Since \mathcal{C} has been seen to be unchanged, too, the Cabibbo matrix \mathfrak{C} , expressed by the first line of (39), is unchanged.

\mathcal{C}_d , which connects original flavor states to renormalized mass states, becomes

$$\hat{\mathcal{C}}_d \equiv \hat{\mathcal{C}}_{d0} \mathcal{V}_d V_d = R_\varphi^\dagger \mathcal{C}_d = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{dL} + \varphi) & -\sin(\theta_{dL} + \varphi) \\ \sin(\theta_{dL} + \varphi) & \cos(\theta_{dL} + \varphi) \end{pmatrix} + A_d \begin{pmatrix} -\sin(\theta_{dL} + \varphi) & 0 \\ \cos(\theta_{dL} + \varphi) & 0 \end{pmatrix}, \quad (116)$$

and one gets a similar expression for $\hat{\mathcal{C}}_u$.

We introduce, like before, the renormalized $\hat{\mathfrak{C}}_u$ and $\hat{\mathfrak{C}}_d$ such that $\mathfrak{C} \equiv \hat{\mathfrak{C}} = \hat{\mathfrak{C}}_u^\dagger \hat{\mathfrak{C}}_d$. Redoing the manipulations that led from (38) to (42), one finds that (42) stays unchanged. So do the three first terms of (50), as well as $(\mathfrak{C}_u)^{-1}$. The rotation angles φ and ϑ can be absorbed in the definition of the new renormalized flavor states which are, as expected, deduced from the initial ones (see (48)) by R_φ and R_ϑ . Finally, $\hat{\mathfrak{C}}_d = \mathfrak{C}_d$, $\hat{\mathfrak{C}}_u = \mathfrak{C}_u$: each renormalized mixing matrix stays unchanged. The mixing angles are renormalized as before according to

$$\tilde{\theta}_{uL} = \theta_{uL} + \frac{\epsilon_u}{2}, \quad \tilde{\theta}_{dL} = \theta_{dL} + \frac{\epsilon_d}{2}, \quad \tilde{\theta}_c = \tilde{\theta}_{dL} - \tilde{\theta}_{uL}. \quad (117)$$

Let us also write what happens in there for charged currents (the transformations of mass terms and neutral currents are given in (114)). It is convenient for this to use the second line of (45):

$$\bar{\xi}_{uL} \mathfrak{C} \gamma^\mu \xi_{dL} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} [1 + \epsilon_u \mathcal{T}_z(\theta_{uL}) + \epsilon_d \mathcal{T}_z(\theta_{dL})] \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}. \quad (118)$$

³⁴Since φ and ϑ are both free, by tuning the former to $-\theta_{dL}$ and the latter to $-\theta_{uL}$, one can tune both $\hat{\mathcal{C}}_{d0} = R_\varphi^\dagger C_{d0}$ and $\hat{\mathcal{C}}_{u0} = R_\vartheta^\dagger C_{u0}$ to the unit matrix: the mixing angles connecting, in both sectors, the new classical mass states to the initial flavor states, can thus be cast to zero (the mixing angles connecting the rotated bare flavor states to the new classical mass eigenstates are left unchanged by the rotation). However, if one considers charged currents in flavor space, we show after (118) that their group structure stays unaltered only if the two arbitrary flavor rotations become identical; this accordingly favors a common arbitrary flavor rotation in the two sectors. See also appendix E for the reverse statement that, by a flavor rotation, one can always align the new flavor states to the classical mass states.

By the transformations (113) and (115) the arguments of $\mathcal{T}_z(\theta_{uL})$ and $\mathcal{T}_z(\theta_{dL})$ in (118) are both shifted by $(\varphi + \vartheta)$: $2\theta_{uL} \rightarrow 2\theta_{uL} + \varphi + \vartheta$, and $2\theta_{dL} \rightarrow 2\theta_{dL} + \varphi + \vartheta$, such that their difference stays the same. The

structure of (118) stays unchanged, but for the 1, which becomes $\begin{pmatrix} \cos(\varphi - \vartheta) & \sin(\varphi - \vartheta) \\ -\sin(\varphi - \vartheta) & \cos(\varphi - \vartheta) \end{pmatrix}$ ³⁵.

Because of this term, the group structure of charged currents is modified, since it no longer projects only on \mathcal{T}_z , unless $\varphi = \vartheta$; accordingly, if one wants to preserve it, the same arbitrary flavor rotation should be performed in both sectors.

So, while independent $e^{i\alpha\mathcal{T}_y^u} \times e^{i\beta\mathcal{T}_y^d}$ flavor rotations do not change, in the new bases, the mixing angles (see also footnote 34), they modify the different parts of the Lagrangian in different ways. The tightly connected structure of neutral currents and mass terms stay unchanged and they are continuously rotated into one another. The modification of charged currents is more important unless the two rotations are identical. Accordingly, requesting that neutral and charged gauge currents exhibit the same flavor structure provides a constraint on the arbitrary flavor rotations that can be performed and thus a connection between sectors of different electric charge. This is one of the consequences of the fact that the angles of the two sectors get entangled by radiative corrections. It has also consequences for the alignment (up to small radiative corrections) of mass and flavor eigenstates in *one* of the two sectors (u, c) or (d, s) (see subsection 7.2).

Arbitrary unitary transformations

We now consider arbitrary 2×2 unitary transformations Ω^u and Ω^d on fermions.

Like for rotations, it is straightforward to show that \mathcal{C}_0 , Shabalin's counterterms, \mathcal{C} , $\mathcal{V}_{u,d}$, $V_{u,d}$ and $U_{u,d}$ stay unchanged. So do $\mathcal{V}_d V_d$ and $\mathcal{V}_u V_u$ and, finally, the Cabibbo matrix \mathfrak{C} between the new renormalized mass states.

However, \mathcal{C}_d becomes $\hat{\mathcal{C}}_d = \Omega^{d\dagger} \mathcal{C}_d$ and \mathcal{C}_u becomes $\hat{\mathcal{C}}_u = \Omega^{u\dagger} \mathcal{C}_u$, which do not write any more as simply as (116).

We parametrize, with the appropriate u or d index for α and $\vec{\beta}$ (and we replace for clarity the argument $u \equiv \tan 2\theta$ of the \mathcal{T} generators by θ according to (96) and (99))

$$\Omega = e^{i(\alpha + \beta_x \mathcal{T}_x(\theta) + \beta_y \mathcal{T}_y(\theta) + \beta_z \mathcal{T}_z(\theta))}. \quad (120)$$

Concerning mass terms and neutral currents, in the original flavor basis one gets:

$$\begin{aligned} \Omega^\dagger \mathcal{T}_x(\theta) \Omega &\approx \mathcal{T}_x\left(\theta + \frac{\beta_y}{2}\right) + \beta_z \mathcal{T}_y, \\ \Omega^\dagger \mathcal{T}_z(\theta) \Omega &\approx \mathcal{T}_z\left(\theta + \frac{\beta_y}{2}\right) - \beta_x \mathcal{T}_y, \end{aligned} \quad (121)$$

while, for charged currents (118) becomes:

³⁵One can check directly this statement by starting again from (39), which we have shown to be unchanged (though \mathcal{C}_{u0} and \mathcal{C}_{d0} have changed, \mathcal{C}_0 stays unchanged). We just have to make the transformation from the new classical mass eigenstates to the original flavor states. This is the role of the transformations $\hat{\mathcal{C}}_{d0}$ and $\hat{\mathcal{C}}_{u0}$ such that, in the original flavor basis the charged currents write (omitting the $W_\mu \gamma^\mu$)

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} \hat{\mathcal{C}}_{u0} \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 & -A_u \\ -A_u & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} 1 & -A_d \\ -A_d & 1 \end{pmatrix} \right] \hat{\mathcal{C}}_{d0}^\dagger \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{u}_{fL} & \bar{c}_{fL} \end{pmatrix} R_\vartheta^\dagger \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{C}_{u0} \left[\begin{pmatrix} 1 & -A_u \\ -A_u & 1 \end{pmatrix} \mathcal{C}_0 + \mathcal{C}_0 \begin{pmatrix} 1 & -A_d \\ -A_d & 1 \end{pmatrix} \right] \hat{\mathcal{C}}_{d0}^\dagger \right\} R_\varphi \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (119)$$

which yields the same conclusion as operating with R_ϑ and R_φ directly on (118).

$$\begin{aligned}
& \Omega^{u\dagger} [1 + \epsilon_u \mathcal{T}_z(\theta_u) + \epsilon_d \mathcal{T}_z(\theta_d)] \Omega^d \\
& \approx \Omega^{u\dagger} \Omega^d + \epsilon_u \left[\mathcal{T}_z \left(\theta_u + \frac{\beta_y^u + \beta_y^d}{4} \right) + i(\alpha_d - \alpha_u) \mathcal{T}_z(\theta_u) - \frac{1}{2} \beta_x^u \mathcal{T}_y - \frac{i}{4} \beta_z^u \right. \\
& \quad \left. + \frac{i}{4} \beta_x^d F((\theta_u - \theta_d)) + \frac{i}{4} \beta_z^d G((\theta_u - \theta_d)) \right] \\
& \quad + \epsilon_d \left[\mathcal{T}_z \left(\theta_d + \frac{\beta_y^u + \beta_y^d}{4} \right) + i(\alpha_d - \alpha_u) \mathcal{T}_z(\theta_d) - \frac{1}{2} \beta_x^d \mathcal{T}_y + \frac{i}{4} \beta_z^d \right. \\
& \quad \left. + \frac{i}{4} \beta_x^u F((\theta_u - \theta_d)) - \frac{i}{4} \beta_z^u G((\theta_u - \theta_d)) \right], \\
& \text{with } F(\tau) = \begin{pmatrix} \sin 2\tau & \cos 2\tau \\ -\cos 2\tau & \sin 2\tau \end{pmatrix}, \quad G(\tau) = \begin{pmatrix} \cos 2\tau & \sin 2\tau \\ -\sin 2\tau & \cos 2\tau \end{pmatrix}. \tag{122}
\end{aligned}$$

So, mass terms, neutral currents and charged currents are all in general deeply modified, which corresponds to a strong breaking of the $SU(2)_f \times U(1)_f$ flavor symmetry.

6.2.4 Self energy, neutral currents and Ward identity

Departure from the inappropriate Wigner-Weisskopf approximation [7][9] can also be done by working with an effective renormalized q^2 -dependent mass matrix (self-energy) $M(q^2)$.

The eigenvalues of $M(q^2)$ are now q^2 -dependent, and are determined by the equation $\det[M(q^2) - \lambda(q^2)] = 0$ ³⁶. Let them be $\lambda_1(q^2) \dots \lambda_n(q^2)$. The physical masses satisfy the n self-consistent equations $q^2 = \lambda_{1\dots n}(q^2)$, such that $m_1^2 = \lambda_1(m_1^2) \dots m_n^2 = \lambda_n(m_n^2)$. At each m_i^2 , $M(m_i^2)$ has n eigenvectors, but only one corresponds to the physical mass eigenstate; the others are “spurious” states [7]. Even if the renormalized mass matrix is hermitian at any given q^2 , the physical mass eigenstates corresponding to different q^2 belong to as many different orthonormal sets of eigenstates and thus, in general, do not form an orthonormal set. The discussion proceeds like in the core of the paper, leading to similar conclusions.

We study below the role of Ward Identities. They will strengthen our belief that flavor rotations should be considered as a very softly broken unitary symmetry group, which provides constraints for the Standard Model and its “vicinity”. These constraints in particular do not suffer the major drawback of textures, which are unstable by such transformations.

In each channel, for example (d, s) , the vertex function Γ_μ (at vanishing incoming momentum for the gauge boson) and the propagator S should satisfy the Ward identity

$$\Gamma_\mu(q, q) = \frac{\partial}{\partial q_\mu} S^{-1}(q). \tag{123}$$

Accordingly, both sides of (123) should be invariant by the same group of symmetry. In (bare) flavor space, the vertex function is (up to γ^μ) nothing more than $(C^{-1})^\dagger(q^2)C^{-1}(q^2)$ encountered before for neutral currents.

We write the (d, s) propagator $S(q^2)$ (we suppose that it is symmetric, such that left and right eigenstates are obtained by the same rotation) as

$$S^{-1}(q^2) = \not{q} - M(q^2), \quad M(q^2) = \begin{pmatrix} a(q^2) & c(q^2) \\ c(q^2) & b(q^2) \end{pmatrix}. \tag{124}$$

³⁶This is the simple case of a normal mass matrix, which can be diagonalized by a single (q^2 -dependent) unitary matrix. When it is non-normal, the standard procedure uses a bi-unitary diagonalization.

One defines $\theta(q^2)$ such that $\tan 2\theta(q^2) = \frac{2c(q^2)}{a(q^2) - b(q^2)}$; $M(q^2)$ can then be rewritten

$$M(q^2) = \frac{a(q^2) + b(q^2)}{2} + \frac{a(q^2) - b(q^2)}{2 \cos 2\theta(q^2)} \begin{pmatrix} \cos 2\theta(q^2) & \sin 2\theta(q^2) \\ \sin 2\theta(q^2) & -\cos 2\theta(q^2) \end{pmatrix}. \quad (125)$$

One gets:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_\mu} S^{-1}(q) &= \gamma^\mu + 2q_\mu \left[\frac{\partial(a(q^2) + b(q^2))}{2 \partial q^2} - \frac{a(q^2) - b(q^2)}{2 \cos 2\theta(q^2)} \begin{pmatrix} \sin 2\theta(q^2) & -\cos 2\theta(q^2) \\ -\cos 2\theta(q^2) & -\sin 2\theta(q^2) \end{pmatrix} \frac{\partial \theta(q^2)}{\partial q^2} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial}{\partial q^2} \left(\frac{a(q^2) - b(q^2)}{2 \cos 2\theta(q^2)} \right) \right] \begin{pmatrix} \cos 2\theta(q^2) & \sin 2\theta(q^2) \\ \sin 2\theta(q^2) & -\cos 2\theta(q^2) \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (126)$$

in which only the first two terms are invariant by the same transformation Ω_z (88) as the vertex function $\Gamma_\mu(q^2)$; the last one, proportional to $\frac{\partial \Delta m(q^2)}{2 \partial q^2}$ is not. Thus, instead of imposing “textures”, we shall rather constrain the self-energy to satisfy the condition

$$a(q^2) - b(q^2) = 2\mu \cos 2\theta(q^2), \quad \mu = \text{cst}, \quad (127)$$

(of course trivially satisfied for $a(q^2) = b(q^2)$, in which case $\theta(q^2) = \pi/4$) or, equivalently

$$M(q^2) = a(q^2) - \mu \cos 2\theta(q^2) + \mu \begin{pmatrix} \cos 2\theta(q^2) & \sin 2\theta(q^2) \\ \sin 2\theta(q^2) & -\cos 2\theta(q^2) \end{pmatrix}. \quad (128)$$

The eigenvalues of $M(q^2)$ are $\lambda_+(q^2) = a(q^2) + 2\mu \sin^2 \theta(q^2)$ and $\lambda_-(q^2) = a(q^2) - 2\mu \cos^2 \theta(q^2)$ (thus $\mu = (\lambda_+(q^2) - \lambda_-(q^2))/2$), such that the physical masses (poles of the propagator) satisfy

$$m_1 = a(m_1^2) + 2\mu \sin^2 \theta(m_1^2), \quad m_2 = a(m_2^2) - 2\mu \cos^2 \theta(m_2^2). \quad (129)$$

The degenerate case $m_1 = m_2$ corresponds to $\mu = 0$. By (127), this is equivalent to $a(q^2) = b(q^2)$ and to $\theta = \pi/4$. For quasi-degenerate systems $m_1 \approx m_2 \approx m$, one has $\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\mu}{a(m^2) - \mu \cos 2\theta(m^2)} \approx \frac{\mu}{a(m^2)}$ and $\mu \approx \frac{m_1 - m_2}{2}$.

Unlike textures, this form of the self-energy, which is constrained by the Ward identity (123) and sym-

metry requirements, is stable by a unitary transformation $\begin{pmatrix} d_f \\ s_f \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_f \\ s_f \end{pmatrix}$;

$M(q^2)$ is transformed into: $a(q^2) - \mu \cos 2\theta(q^2) + \mu \begin{pmatrix} \cos 2(\theta(q^2) + \varphi) & \sin 2(\theta(q^2) + \varphi) \\ \sin 2(\theta(q^2) + \varphi) & -\cos 2(\theta(q^2) + \varphi) \end{pmatrix}$, which

shows that the mixing angle $\theta(q^2)$ has simply become, as expected, $\theta(q^2) + \varphi$ while the spectrum is unchanged. So is the form (99) for the vertex function Γ_μ .

So, our conjecture is that any self-energy or vertex function should be of the form

$$\Xi(q^2) + \mu \begin{pmatrix} \cos 2\theta(q^2) & \pm \sin 2\theta(q^2) \\ \pm \sin 2\theta(q^2) & -\cos 2\theta(q^2) \end{pmatrix} \text{ or } \Sigma(q^2) + \mu \begin{pmatrix} \sin 2\theta(q^2) & \pm \cos 2\theta(q^2) \\ \pm \cos 2\theta(q^2) & -\sin 2\theta(q^2) \end{pmatrix}, \quad (130)$$

which make them stable by flavor rotations. They are in particular normal, and thus can always be diagonalized by a unique unitary transformation, which can be used to define both left and right eigenvectors.

We end up this section by some additional remarks concerning textures. Eq.(128) trivially rewrites

$$M(q^2) = a(q^2) + \mu \begin{pmatrix} 0 & \sin 2\theta(q^2) \\ \sin 2\theta(q^2) & -2 \cos 2\theta(q^2) \end{pmatrix}, \quad (131)$$

reminiscent, up to $a(q^2)$ (which does not change $\theta(q^2)$) of the triangular matrix suggested in [10] for $\tan 2\theta(q^2) = -2$; however, as shown below, this texture is not stable by flavor rotation. Rotating (128) and (131), one gets:

$$\begin{aligned} R^\dagger(\varphi) \left[a(q^2) - \mu \cos 2\theta(q^2) + \mu \begin{pmatrix} \cos 2\theta(q^2) & \sin 2\theta(q^2) \\ \sin 2\theta(q^2) & -\cos 2\theta(q^2) \end{pmatrix} \right] R(\varphi) \\ = a(q^2) - \mu \cos 2\theta(q^2) + \mu \begin{pmatrix} \cos 2(\theta(q^2) + \varphi) & \sin 2(\theta(q^2) + \varphi) \\ \sin 2(\theta(q^2) + \varphi) & -\cos 2(\theta(q^2) + \varphi) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (132)$$

$$\begin{aligned} \text{while } R^\dagger(\varphi) \left[a(q^2) + \mu \begin{pmatrix} 0 & \sin 2\theta(q^2) \\ \sin 2\theta(q^2) & -2 \cos 2\theta(q^2) \end{pmatrix} \right] R(\varphi) \\ = a(q^2) + \mu \begin{pmatrix} -\sin 2\theta(q^2) \sin 2\varphi - 2 \cos 2\theta \sin^2 \varphi & \sin 2(\theta(q^2) + \varphi) \\ \sin 2(\theta(q^2) + \varphi) & \sin 2\theta(q^2) \sin 2\varphi - 2 \cos 2\theta(q^2) \cos^2 \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (133)$$

By evaluating the ratio between twice the non-diagonal term and the difference of diagonal ones, one finds, on both (132) and (133), that, as expected, the mixing angle has become $\theta(q^2) + \varphi$. However, while the “structure” of (132) is manifestly preserved by the rotation, the 0 texture in (133) is not.

7 Conclusion, open issues and outlook

7.1 Summary

That mixing matrices connecting flavor to mass eigenstates of non-degenerate coupled fermion systems should not be considered *a priori* as unitary has been given in this work, in addition to general QFT arguments, a perturbative basis from the calculation of radiative corrections at 1-loop to fermionic self-energies and neutral currents. Finite counterterms of Shabalin have been in particular shown to play an important role, since they determine at the same time the renormalization of the mixing angles and the departure from 1 of the matrix that controls neutral currents in the bare flavor basis.

We have shown that, in the renormalized mass basis, which, unlike the bare one, is no longer orthonormal, the renormalized mixing (Cabibbo) matrix stays unitary and, as required by the closure of the $SU(2)_L$ gauge algebra, neutral currents are, like in the bare mass basis, controlled by the unit matrix.

The peculiar feature that is satisfied for two generations by the Cabibbo angle, that universality of neutral currents is violated with the same strength as the absence of FCNC's, has been shown to be compatible with all mixing angles of quarks and leptons for three generations, too. For neutrinos, we have shown that there exists only one solution for θ_{13} to the corresponding equations that rigorously falls within present experimental limits, and we have obtained, without any hypothesis (textures) concerning mass matrices, the property of “quark-lepton complementarity” between the Cabibbo angle and their θ_{12} .

Flavor symmetries, and their entanglement with $SU(2)_L$ gauge symmetry, have been shown to underlie the physics of mixing angles. In particular, for two generations, the ways gauge currents and fermionic mass terms (or self-energy) transform by flavor rotations bear common footprints left by a non-degenerate mass spectrum.

7.2 Physically relevant mixing angles. Flavor rotations as a very softly broken symmetry of the Standard Model

The results that have been exposed are valid for fermions of both electric charges. They concern the mixing angles which parametrize

- * for quarks, the mixing matrix K_u of u -type quarks as well as K_d of d -type quarks;
- * for leptons, the mixing matrix K_ν of neutrinos as well as that of charged leptons K_ℓ ,

and we have shown that our approach accounts for the observed values of the mixing angles.

However, a question arises : the measured values of the mixing angles are commonly attached, not to a single mixing matrix, e.g. K_u or K_d , but to the product $K = K_u^\dagger K_d$ which occurs in charged currents when both quark types are mass eigenstates. Thus, in the standard approach, they are *a priori* related to an entanglement of the mixing angles of quarks (or leptons) of different charges. Then, if mixing angles in each sector are expected to satisfy the same criterion, their difference, which makes up, up to small approximation, the Cabibbo angle, would be expected to vanish.

The same issue arises in the leptonic sector. Let us consider for example the case of solar neutrinos: the flux of “electron neutrinos” detected on earth is (roughly) half the one predicted by solar model to be emitted from the sun. Would the flux predicted in solar models concern flavor neutrinos, and would also the detection process counts flavor neutrinos, the sole mixing matrix which controls their evolution and oscillations would be K_ν ; it is indeed the only matrix involved in the projection of flavor states onto mass (propagating) states. The situation is different if the comparison is made between the (emitted and detected) fluxes of states ν_e, ν_μ, ν_τ defined in subsection 3.1 (see also appendix D); since their projections on the mass eigenstates now involve the product $K_\ell^\dagger K_\nu$, their oscillations are, like for quarks, controlled by an entanglement of the mixing angles of neutrinos and charged leptons. The nature of the neutrino eigenstates that are produced and detected is also sometimes questioned (see also for example [20]). An often proposed solution is that, for charged leptons, their flavor is defined to coincide with their mass [19], which amounts to setting $K_\ell = 1$.

And this is indeed the solution that comes naturally to the mind since, as we stated in the text of the paper (see also appendix E): while arbitrary independent flavor rotations are *a priori* allowed in each sector of different charge, with the corollary statement that the only physically relevant mixing angles are the ones occurring in the Cabibbo matrix, these two rotations are constrained to be identical if one likes to preserve the group structure (breaking pattern), not only of neutral gauge currents, but also of charged currents in bare flavor space. For $\vartheta = -\theta_{uL} = \varphi$, only the mixing angles in the (u, c) sector becomes vanishing (alignment of bare mass and flavor states in this sector). The structure (118) of charged gauge currents in bare flavor space becomes $(1 + \epsilon_u \mathcal{T}_z(0) + \epsilon_d \mathcal{T}_z(\theta_{dL} - \theta_{uL}))$. Now, as shown in subsection 2.1.2 (see also footnote 16), one can choose a renormalization scheme in which the parameter $\epsilon_u \equiv A_u$ vanishes with θ_u . This solution, which corresponds to a mixing matrix equal to the unit matrix after 1-loop corrections have been included, trivially satisfies the criterion under consideration, *i.e.* that the violation of universality (non existing in this case) is equal to the violation of the absence of FCNC’s (also vanishing). In this renormalization scheme, when θ_u is turned to 0, the formula (118) for charged

current in bare flavor space becomes $\bar{\xi}_{uL} \mathfrak{C} \gamma^\mu \xi_{dL} = \begin{pmatrix} \bar{u}'_{fL} & \bar{c}'_{fL} \end{pmatrix} [1 + \epsilon'_d \mathcal{T}_z(\theta_{dL} - \theta_{uL})] \gamma^\mu \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}$,

in which the only argument of the \mathcal{T}_z generator is the Cabibbo angle. The criterion linking universality and FCNC’s can accordingly be applied to charged gauge currents in the bare flavor basis, which controls the observed Cabibbo angle.

The group of identical flavor rotations by an angle φ in the two sectors (u, c) and (d, s) (or (e, μ) and (ν_e, ν_μ)):

- * shifts both arguments θ_{uL} and θ_{dL} in the $SU(2)_f$ generators \mathcal{T}_z and \mathcal{T}_x occurring respectively in neutral currents and mass matrices by φ (see (114));
- * yields the same shift in charged currents (see (118));
- * does not modify the physical Cabibbo angle (see “Flavor rotations” in subsection 6.2.3);

* leaves invariant the rest of the Standard Model Lagrangian and does not change the physical masses. So, though they do not leave, strictly speaking, the whole Lagrangian invariant, flavor rotations (identical in both sectors) appear as a very mildly broken symmetry of the Standard Model.

7.3 A perturbative (?) challenge

Recovery, by standard perturbative techniques (Feynman diagrams) ³⁷, of the phenomenological results of this work, in particular the empirical connection between universality and FCNC's in bare flavor space that leads to observed values of mixing angles stays an open issue. Since this connection, as we saw at length, rests on a criterion that does not depend on Shabalin's counterterms, it must involve other type of perturbative calculations than the ones that lead to their values. The goal is to calculate, to begin with at 1-loop (the classical result is trivially true), violation of universality in bare flavor space in a given channel, for example the difference between the vertices $Z^\mu d_f \bar{d}_f$ and $Z^\mu s_f \bar{s}_f$, and to compare them to the amount $Z^\mu d_f \bar{s}_f$ and $Z^\mu s_f \bar{d}_f$ of flavor changing neutral currents in the same channel, while including the kinetic and mass finite counterterms of Shabalin, which have been evaluated in bare mass space. In particular, their introduction necessitates to abandon the hypothesis that mixing matrices are always unitary. In this context, re-doing, for example, the subtle perturbative calculations of renormalized mixing angles with "on mass-shell" renormalization performed in [21] while dropping this hypothesis, which reduces the number of free parameters and brings simplifying constraints on the counterterms, looks a rather cumbersome task ³⁸.

Also, for such multi-scale systems as coupled fermions, each renormalization scale optimizes the calculation of parameters at this scale, while, for other scales, one has to rely on renormalization group equations. Unfortunately, these equations have also only been approximately solved with the simplifying assumption that the renormalized mass matrices are hermitian ³⁹ and that the renormalized mixing matrices are unitary. Also, as far as the Yukawa couplings are concerned, the expressions that have been obtained at two loops for their β functions start the evolution only down from the top quark mass [22], which makes them rather inadequate for the study of subsystems with masses well below this scale; they have furthermore denominators in $(m_i - m_j)$, which makes them unstable for low mass systems not very far from degeneracy.

Dealing with these issues is also currently under investigation.

7.4 CP violation

In this work we have deliberately ignored CP violating mixing angles and all effects of CP violation. There are several reasons for this:

- * they are *a priori* small and should not quantitatively alter the results that have been obtained for the other type of mixing angles;
- * since the renormalized Cabibbo matrix is constrained by $SU(2)_L$ gauge invariance to stay unitary, we do not expect strong deviations from the customary results;
- * the introduction of CP violating phases would considerably complicate the trigonometric equations to solve, which are already highly non-trivial.

There is however an interesting point: the most general non-unitary mixing matrix allows *a priori* CP violation even for two generations. But we consider this as another matter which deserves a separate investigation.

³⁷ which is usually performed in the bare, orthonormal, mass basis

³⁸ A straightforward calculation shows that, if one does a naive calculation in bare mass space and not in bare flavor space, and if one does not worry about finite renormalization, the condition that one gets on the mixing angle is the "dual" of the one obtained here, that is $\tan 2\theta = 2$, instead of $\tan 2\theta = 1/2$. Some mechanism linking the transition from one basis to the other and the transformation $\tan 2\theta \rightarrow \pm 1/\tan 2\theta$ (see subsection 6.2.1) seems at work, which needs to be uncovered.

³⁹ One can go to hermitian mass matrices by rotating right-handed fermions as far as they are not coupled; however, at 2-loops, the charged weak currents also involve right-handed fermions, which cannot be anymore freely rotated.

7.5 Conclusion and perspective

This work does not, obviously, belong to what is nowadays referred to as "Beyond the Standard Model", since it does not incorporate any "new physics" such as supersymmetry, "grand unified theories (GUT)" or extra-dimensions. However it does not strictly lie within the SM either, even if it is very close to. Of course, it shares with the latter its general framework (mathematical background and physical content), and also borrows from it the two physical conditions of universality for diagonal neutral currents and absence of FCNC's, which play a crucial role in the process. But, on the basis of the most general arguments of QFT, we make a decisive use of the essential non-unitarity of the mixing matrices, whereas only unitary matrices are present in the SM. This property may be considered, in the SM, as an "accidental" characteristic of objects which are intrinsically non-unitary ⁴⁰.

The mixing angles experimentally observed get constrained in the vicinity of this "standard" situation, a slight departure from which being due to mass splittings. Hence our approach can be considered to explore the "Neighborhood of the Standard Model", which is likely to exhibit low-energy manifestations of physics "Beyond the Standard Model".

While common approaches limit themselves to guessing symmetries for mass matrices (see for example [6] and references therein), we showed that relevant patterns reveal instead themselves in the violation of properties attached to gauge currents: in each given (i, j) flavor channel, two dimensional flavor rotation appears as a flavor subgroup softly broken by the presence of mass splittings, which continuously connects neutral currents and the fermionic self-energy.

When two generations are concerned, nature seems to exhibit a quantization of the \tan of twice the mixing angles as multiples of $1/2$. This corresponds to the property that, in the original flavor basis, the effects of lifting the mass degeneracy are such that universality for neutral currents is violated with the same strength as the absence of FCNC's. The third generations appears as a small perturbation of this property. Whether this quantization really exists and whether it can be cast on a firm theoretical background, in particular through perturbative calculations, stays unfortunately an open question.

It is remarkable that the same type of symmetry underlies both the quark and leptonic sectors; they only differ through the $0th$ order solution to the "unitarization equations", the twofold-ness of which was recently uncovered in [2]. In the neutrino case, the values that we obtain for the mixing angles (with the smallest one of θ_{13}) do not deviate by more than 10% from the tri-bimaximal pattern [23].

To conclude, this work demonstrates that flavor physics offers to our investigation very special and simple patterns which had been, up to now, unnoticed. Strong arguments in favor of them have been given in both the quark and leptonic sectors, and they will be further tested when the third mixing angle of neutrinos is accurately determined.

Acknowledgments: Discussions with A. Djouadi, V.A. Novikov and J. Orloff are gratefully acknowledged.

⁴⁰For a (constant unique) mass matrix, unitarity of the mixing matrix has commonly been linked with the unitarity of the theory. See also footnote 1.

Appendix

A $\tilde{\theta}_{13} = 0 \Rightarrow \theta_{13} = 0$

Using the notations of section 3, we start with the following system of equations:

$$\frac{[11] + [22]}{2} = [33] \Leftrightarrow s_{13}^2 + s_{23}^2 + c_{23}^2 = 1; \quad (134a)$$

$$[11] = [22] \Leftrightarrow c_{13}^2 \cos(2\theta_{12}) = (c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) \cos(2\tilde{\theta}_{12}); \quad (134b)$$

$$[12] = 0 = [21] \Leftrightarrow c_{13}^2 \sin(2\theta_{12}) = (c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2) \sin(2\tilde{\theta}_{12}); \quad (134c)$$

$$[13] = 0 = [31] \Leftrightarrow \tilde{s}_{12} (\sin(2\theta_{23}) - \sin(2\tilde{\theta}_{23})) = c_{12} \sin(2\theta_{13}); \quad (134d)$$

$$[23] = 0 = [32] \Leftrightarrow \tilde{c}_{12} (\sin(2\tilde{\theta}_{23}) - \sin(2\theta_{23})) = s_{12} \sin(2\theta_{13}). \quad (134e)$$

From equation (134a), we have $c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2 \neq 0$, which entails $c_{13}^2 \neq 0$ ⁴¹. Let us study the consequence on the two equations (134b) and (134c).

- the two sides of (134b) vanish for $\cos(2\theta_{12}) = 0 = \cos(2\tilde{\theta}_{12})$, i.e. $\theta_{12} = 0[\frac{\pi}{2}] = \tilde{\theta}_{12}$. (134c) then gives $c_{13}^2 = c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2$, which, associated with (134a), yields the following solution⁴²: $\theta_{13} = 0[\pi]$ and $\tilde{\theta}_{23} = \pm\theta_{23}[\pi]$.

- the two sides of (134c) vanish for $\sin(2\theta_{12}) = 0 = \sin(2\tilde{\theta}_{12}) = 0$, i.e. $\theta_{12} = 0[\frac{\pi}{2}] = \tilde{\theta}_{12}$.

(134b) gives then $c_{13}^2 = c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2$, hence, like previously, $\theta_{13} = 0[\pi]$ and $\tilde{\theta}_{23} = \pm\theta_{23}[\pi]$.

- in the other cases we can calculate the ratio (134b) / (134c), which gives $\tan(2\theta_{12}) = \tan(2\tilde{\theta}_{12})$, hence $\theta_{12} = \tilde{\theta}_{12}[\pi]$ or $\theta_{12} = \frac{\pi}{2} + \tilde{\theta}_{12}[\pi]$:

- * $\theta_{12} = \frac{\pi}{2} + \tilde{\theta}_{12}[\pi]$ implies for (134b)(134c) $c_{13}^2 = -c_{23}^2 - \tilde{s}_{23}^2$, which, together with (134a) ($c_{13}^2 = s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2$), gives a contradiction : $2 = 0$:

- * $\theta_{12} = \tilde{\theta}_{12}(\neq 0)[\pi]$ implies, like previously, $c_{13}^2 = c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2$, which gives, when combined with (134a): $\theta_{13} = 0[\pi]$ and $\tilde{\theta}_{23} = \pm\theta_{23}[\pi]$.

Hence, it appears that whatever the case, the solution gives rise to $\theta_{13} = 0[\pi]$.

Let us now look at (134d) and (134e). Since $\theta_{13} = 0$, the two r.h.s.'s vanish, and we obtain the twin equations $\tilde{s}_{12}(\sin(2\theta_{23}) - \sin(2\tilde{\theta}_{23})) = 0$ and $\tilde{c}_{12}(\sin(2\theta_{23}) - \sin(2\tilde{\theta}_{23})) = 0$, which, together, imply $\sin(2\theta_{23}) = \sin(2\tilde{\theta}_{23})$. It follows that, either $\theta_{23} = \tilde{\theta}_{23}[\pi]$ or $\theta_{23} = \frac{\pi}{2} - \tilde{\theta}_{23}[\pi]$;

- * $\theta_{23} = \tilde{\theta}_{23}[\pi]$ matches the result of the previous discussion in the “+” case, whereas, in the “-” case, the matching leads to $\theta_{23} = \tilde{\theta}_{23} = 0$, which is to be absorbed as a particular case in the “+” configuration;

- * $\theta_{23} = \frac{\pi}{2} - \tilde{\theta}_{23}[\pi]$ matches the result of the previous discussion in the “+” configuration, in which case it leads to $\theta_{23} = \tilde{\theta}_{23} = \frac{\pi}{4}[\frac{\pi}{2}]$, i.e. maximal mixing between the fermions of the second and third generations.

⁴¹Indeed, let us suppose that c_{13} vanishes. Then $\cos(2\tilde{\theta}_{12})$ and $\sin(2\tilde{\theta}_{12})$ must vanish simultaneously, which is impossible.

⁴²
$$\begin{cases} c_{13}^2 = c_{23}^2 + \tilde{s}_{23}^2 \\ s_{13}^2 + s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2 = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} s_{23}^2 + \tilde{c}_{23}^2 = 1 \\ s_{13}^2 = 0 \end{cases}$$

B $(\theta_{12}, \theta_{23})$ solutions of eqs. (59) (60) (61) (62) (63) for $\theta_{13} = 0 = \tilde{\theta}_{13}$

Excluding $\tilde{\theta}_{12} = 0$, (65a) and (65b) require $\sin(2\theta_{23}) = \sin(2\tilde{\theta}_{23}) \Rightarrow \tilde{\theta}_{23} = \theta_{23} + k\pi$ or $\tilde{\theta}_{23} = \pi/2 - \theta_{23} + k\pi$.

- for $\tilde{\theta}_{23} = \theta_{23} + k\pi$ Cabibbo-like,

(65c) requires $\sin(2\theta_{12}) = \sin(2\tilde{\theta}_{12}) \Rightarrow \tilde{\theta}_{12} = \theta_{12} + n\pi$ or $\tilde{\theta}_{12} = \pi/2 - \theta_{12} + n\pi$;

(65d) requires $\cos(2\theta_{12}) = \cos(2\tilde{\theta}_{12}) \Rightarrow \tilde{\theta}_{12} = \pm\theta_{12} + p\pi$;

(65e) requires $s_{12}^2 + \tilde{c}_{12}^2 - 1 = 0 \Rightarrow \tilde{\theta}_{12} = \pm\theta_{12} + r\pi$.

The solutions of these three equations are $\theta_{12} = \tilde{\theta}_{12} + m\pi$ Cabibbo-like or $\theta_{12} = \pi/4 + q\pi/2$ maximal ($\tilde{\theta}_{12} = \pm\theta_{12} + r\pi$ is then also maximal). They are associated with $\tilde{\theta}_{23} = \theta_{23} + k\pi$, condition heading this paragraph.

- for $\tilde{\theta}_{23} = \pi/2 - \theta_{23} + k\pi$,

(65c) requires $s_{12}c_{12} = 2c_{23}^2\tilde{s}_{12}\tilde{c}_{12}$;

(65d) requires $c_{12}^2 - s_{12}^2 = 2c_{23}^2(\tilde{c}_{12}^2 - \tilde{s}_{12}^2)$;

(65e) requires $s_{12}^2 + 2c_{23}^2\tilde{c}_{12}^2 - 2s_{23}^2 = 0$.

Taking the ratio of the first two conditions yields $\tan(2\theta_{12}) = \tan(2\tilde{\theta}_{12}) = 2c_{23}^2 \Rightarrow \tilde{\theta}_{12} = \theta_{12} + k\pi/2 + n\pi$, which entails $2c_{23}^2 = 1 \Rightarrow \theta_{23} = \pm\pi/4 + p\pi/2$ maximal; by the condition $\tilde{\theta}_{23} = \pi/2 - \theta_{23} + k\pi$ heading this paragraph, $\tilde{\theta}_{23}$ is then maximal, too. The third condition becomes $s_{12}^2 + \tilde{c}_{12}^2 - 1 = 0$, which requires $\tilde{\theta}_{12} = \pm\theta_{12} + r\pi$. Then, the second condition is automatically satisfied, but the first requires that the “+” sign be chosen; so, $\tilde{\theta}_{12} = \theta_{12} + r\pi$ is Cabibbo-like.

- Summary: the solutions are:

- * $\tilde{\theta}_{23} = \theta_{23} + k\pi$ Cabibbo-like, associated with either $\theta_{12} = \tilde{\theta}_{12} + m\pi$ Cabibbo-like or θ_{12} and $\tilde{\theta}_{12}$ maximal;

- * $\tilde{\theta}_{12} = \theta_{12} + r\pi$ Cabibbo-like, associated with θ_{23} and $\tilde{\theta}_{23}$ maximal.

C Sensitivity of the neutrino solution to a small variation of θ_{13}

If one allows for a small $\theta_{13} \approx \tilde{\theta}_{13}$, (61) and (62) become

$$\begin{aligned} & -2\eta s_{12}c_{12}s_{23}c_{23} + \epsilon(s_{12}^2 - c_{12}^2) + \eta s_{13}(c_{23}^2 - s_{23}^2)(c_{12}^2 - s_{12}^2), \\ & -2\eta s_{23}c_{23}(c_{12}^2 - s_{12}^2) + 4\epsilon s_{12}c_{12} - 2\eta s_{13}(c_{23}^2 - s_{23}^2)(2s_{12}c_{12} + \epsilon(c_{12}^2 - s_{12}^2)). \end{aligned} \quad (135)$$

For $\theta_{23}, \tilde{\theta}_{23}$ maximal, the dependence on θ_{13} drops out.

D Charged weak currents

Charged weak currents can be written in six different forms that are all strictly equivalent, but nonetheless refer to different physical pictures. As an example, for two generations of leptons :

$$\begin{aligned} & \overline{\begin{pmatrix} \nu_{ef} \\ \nu_{\mu f} \end{pmatrix}} W_{\mu}^{+} \gamma_L^{\mu} \begin{pmatrix} e_f^{-} \\ \mu_f^{-} \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} \nu_{em} \\ \nu_{\mu m} \end{pmatrix}} W_{\mu}^{+} \gamma_L^{\mu} K_{\nu}^{\dagger} K_{\ell} \begin{pmatrix} e_m^{-} \\ \mu_m^{-} \end{pmatrix} \\ & = \overline{\begin{pmatrix} \nu_{ef} \\ \nu_{\mu f} \end{pmatrix}} W_{\mu}^{+} \gamma_L^{\mu} \left[K_{\ell} \begin{pmatrix} e_m^{-} \\ \mu_m^{-} \end{pmatrix} \right] = \overline{\begin{pmatrix} \nu_{em} \\ \nu_{\mu m} \end{pmatrix}} \left[K_{\nu} \begin{pmatrix} \nu_{ef} \\ \nu_{\mu f} \end{pmatrix} \right] W_{\mu}^{+} \gamma_L^{\mu} \begin{pmatrix} e_f^{-} \\ \mu_f^{-} \end{pmatrix} \\ & = \overline{\begin{pmatrix} \nu_{em} \\ \nu_{\mu m} \end{pmatrix}} W_{\mu}^{+} \gamma_L^{\mu} \left[K_{\nu}^{\dagger} \begin{pmatrix} e_f^{-} \\ \mu_f^{-} \end{pmatrix} \right] = \overline{\begin{pmatrix} \nu_{ef} \\ \nu_{\mu f} \end{pmatrix}} \left[K_{\ell}^{\dagger} \begin{pmatrix} \nu_{em} \\ \nu_{\mu m} \end{pmatrix} \right] W_{\mu}^{+} \gamma_L^{\mu} \begin{pmatrix} e_m^{-} \\ \mu_m^{-} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (136)$$

In the case where one of the $SU(2)$ partners, for example the charged lepton, is undoubtedly a mass eigenstate⁴³, the last expression of (136) shows that it is coupled to the so-called *electronic and muonic neutrinos*

$$\begin{aligned}\nu_e &= (K_\ell^\dagger K_\nu)_{11}\nu_{em} + (K_\ell^\dagger K_\nu)_{12}\nu_{\mu m} = K_{\ell,11}^\dagger \nu_{ef} + K_{\ell,12}^\dagger \nu_{\mu f}, \\ \nu_\mu &= (K_\ell^\dagger K_\nu)_{21}\nu_{em} + (K_\ell^\dagger K_\nu)_{22}\nu_{\mu m} = K_{\ell,21}^\dagger \nu_{ef} + K_{\ell,22}^\dagger \nu_{\mu f}.\end{aligned}\quad (137)$$

The latter are neither flavor eigenstates, nor mass eigenstates, but a third kind of neutrinos, precisely defined as the ones which couple to electron and muon mass eigenstates in the weak charged currents

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} W_\mu^+ \gamma_L^\mu \begin{pmatrix} e_m^- \\ \mu_m^- \end{pmatrix}.\quad (138)$$

E Aligning classical flavor states and classical mass states

We show below that, at the classical level of mass matrices, one can always perform, in each sector, a flavor rotation such that the classical mass eigenstates and the rotated flavor states get aligned. Since the logic is slightly different from the one in paragraph 6.2.3⁴⁴, we chose to explain things in detail here.

Let us now consider the *change of variables* in flavor space $\begin{pmatrix} d'_{fL} \\ s'_{fL} \end{pmatrix} = R_\varphi \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix}$. In terms of the

primed fields, the mass terms in the Lagrangian rewrite $\begin{pmatrix} d'_{fL} \\ s'_{fL} \end{pmatrix}^\dagger R_\varphi M_0 S_\varphi^\dagger \begin{pmatrix} d'_{fR} \\ s'_{fR} \end{pmatrix}$, in which S_φ

is the equivalent of R_φ for right-handed fields. Since M_0 was diagonalized according to $C_{d0}^\dagger M_0 \mathcal{H}_{d0} = \text{diag}(m_d^0, m_s^0)$, $R_\varphi M_0 S_\varphi^\dagger$ is now diagonalized according to $C_{d0}^\dagger R_\varphi^\dagger (R_\varphi M_0 S_\varphi^\dagger) S_\varphi \mathcal{H}_{d0} = \text{diag}(m_d^0, m_s^0)$.

Accordingly, the new classical mass eigenstates are $\begin{pmatrix} d'_{mL} \\ s'_{mL} \end{pmatrix} = C_{d0}^\dagger R_\varphi^\dagger \begin{pmatrix} d'_{fL} \\ s'_{fL} \end{pmatrix} = C_{d0}^\dagger \begin{pmatrix} d_{fL} \\ s_{fL} \end{pmatrix} \equiv$

$\begin{pmatrix} d_{mL}^0 \\ s_{mL}^0 \end{pmatrix}$. So, the classical mass eigenstates are unchanged, but are now deduced from the new classical

flavor states by the product $C_{d0}^\dagger R_\varphi^\dagger$. The angle φ can accordingly be tuned such that this product is the unit matrix. When it is so, the new classical flavor states are aligned with the bare mass states.

The same demonstration holds in the (u, c) sector. This shows that, at the classical level of mass matrices, mixing angles in each sector, when defined as the one connecting bare flavor states to original bare mass states have no physical meaning and can always be tuned to zero. So, the only physical mixing angles are the ones occurring in charged currents. Indeed, since mass states are unchanged, it is even more trivial than in subsection 6.2.3 to show that these angles stay unchanged by arbitrary flavor rotations.

We recall however that, as emphasized in footnote 34, a common flavor rotation of both sectors is required as soon as one wants to preserve the group structure of charged currents in bare flavor space.

⁴³It is commonly assumed to be the case inside the sun (because of the limited available energy, a few MeV , only massive electrons can be produced), and also in the detection process of neutrinos on earth, which proceeds via charged currents and via the detection of the produced physical charged leptons (mass eigenstates).

⁴⁴The change in flavor states was defined, there, by (113) and the transformed Lagrangian was expressed in terms of the original bare flavor fields. Classical mass eigenstates got changed such that the new ones are deduced from the starting ones by

the rotation $R_\varphi: \begin{pmatrix} \hat{d}_{m0} \\ \hat{s}_{m0} \end{pmatrix} = R_\varphi \begin{pmatrix} d_{m0} \\ s_{m0} \end{pmatrix}$. The new classical mass eigenstates could then be aligned with the starting bare

flavor states. In the present approach, it is the new flavor states which can get aligned with the bare mass eigenstates, the latter staying unchanged.

References

- [1] S.L. GLASHOW: *Nucl. Phys.* 22 (1961) 579;
A. SALAM: in “Elementary Particle Theory: Relativistic Groups and Analyticity” (Nobel symposium No 8), edited by N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm 1968);
S. WEINBERG: *Phys. Rev. Lett.* 19 (1967) 1264.
- [2] Q. DURET & B. MACHET: “Mixing angles and non-degenerate coupled systems of particles”, *hep-ph/0606303*, *Phys. Lett. B* 643 (2006) 303.
- [3] Q. DURET & B. MACHET: “The emergence of the Cabibbo angle in non-degenerate coupled systems of fermions”, *hep-ph/0610148*, *Phys. Lett. B* 642 (2006) 469.
- [4] E.P. SHABALIN: “Electric dipole moment of the quark in a gauge theory with left-handed currents”, *Yad. Fiz.* 28 (1978) 151 [*Sov. J. Nucl. Phys.* 28 (1978) 75].
- [5] M.B. GAVELA, A. LE YAOUANC, L. OLIVER, O. PÈNE, J.-C. RAYNAL & T.N. PHAM: “Intermediate states in the calculation of the neutron electric dipole moment”, *Phys. Lett. B* 109 (1982) 83;
ibidem: “CP violation induced by penguin diagrams and the neutron electric dipole moment”, *Phys. Lett. B* 109 (1982) 215.
- [6] See for example:
E. MA: “Lepton family symmetry and the neutrino mixing matrix”, Talk given at 8th Hellenic School on Elementary Particle Physics (CORFU 2005), Corfu, Greece, 4-26 Sept. 2005, *hep-ph/0606024*, *J. Phys. Conf. Ser.* 53 (2006) 451-457, and references therein;
G. ALTARELLI: “Models of Neutrino Masses and Mixings: A Progress Report”, Talk given at 12th International Workshop on Neutrinos Telescopes: Twenty Years after the Supernova 1987A Neutrino Bursts Discovery, Venice, Italy, 6-9 March 2007, *hep-ph/0705.0860*, and references therein.
- [7] B. MACHET, V.A. NOVIKOV & M.I. VYSOTSKY: “Binary systems of Neutral Mesons in Quantum Field Theory”, *hep-ph/0407268*, *Int. J. Mod. Phys. A* 20 (2005) 5399.
- [8] M. RAIDAL: “Prediction $\theta_c + \theta_{sol} = \pi/4$ from flavor physics: a new evidence for grand unification?”, *hep-ph/0404046*, *Phys. Rev. Lett.* 93 (2004) 161801;
H. MINAKATA & A. Yu. SMIRNOV: “Neutrino Mixing and Quark-Lepton Complementarity”, *hep-ph/0405088*, *Phys. Rev. D* 70 (2004) 073009;
S. ANTUSCH, S.F. KING & R.N. MOHAPATRA: “Quark-Lepton Complementarity in Unified Theories”, *hep-ph/0504007*, *Phys. Lett. B* 618 (2005) 150-161.
- [9] V.A. NOVIKOV: “Binary systems in QM and in QFT: CPT”, *hep-ph/0509126*, (La Thuile 2005, Results and perspectives in particle physics, p. 321-332.
- [10] Y. KAJIYAMA, M. RAIDAL & A. STRUMIA: “The golden ration prediction for the solar neutrino mixing”, *arXiv:0705.4559 [hep-ph]*, *Phys. Rev. D* 76 (2007) 117301.
- [11] PARTICLE DATA GROUP: “Review of Particle Physics”, *J. Phys. G* 33 (2006).
- [12] J.C. HARDY: “The status of V_{ud} ”, *hep-ph/0703165*.
- [13] T. SPADARO: “KLOE results on kaon decays and summary status of V_{us} ”, *hep-ex/0703033*.
- [14] B. MACHET & S.T. PETCOV: “Hierarchies of quark masses and the mixing matrix in the standard theory”, *hep-ph/0103334*, *Phys. Lett. B* 513 (2001) 371.

- [15] R.N. MOHAPATRA & A.Y. SMIRNOV: “Neutrino Mass and New Physics”, *hep-ph/0603118*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 56 (2006) 569-628;
M.C. GONZALEZ-GARCIA & M. MALTONI: “Phenomenology with massive neutrinos”, *arXiv:0704.1800 [hep-ph]*.
- [16] B.C. CHAUHAN, M. PICARIELLO, J. PULIDO & E. TORRENTE-LUJAN: “Quark-lepton complementarity with lepton and quark mixing data predict $\theta_{13}^{PMNS} = (9_{-2}^{+1})^\circ$ ”, *hep-ph/0605032*, *Eur. Phys. J. C* 50 (2007) 573-578.
- [17] See for example:
Z.Z. XING: “Nontrivial correlation between the CKM and MNS matrices”, *hep-ph/0503200*, *Phys. Lett. B* 618 (2005) 141.
- [18] C. JARLSKOG: “Ambiguities pertaining to quark-lepton complementarity”, *hep-ph/0507212*, *Phys. Lett. B* 625 (2005) 63-66.
- [19] See for example:
C. GIUNTI: “Theory of Neutrino Oscillations”, *hep-ph/0409230*, Talk given at 16th Conference on High Energy Physics (IFAE 2004), Turin, Italy, 14-16 Apr 2004. Published in *Turin 2004, High energy physics* 427-438 ;
E. Kh. AKHMEDOV: “Do charged leptons oscillate?”, *arXiv:0706.1216 [hep-ph]*, *JHEP* 0709 (2007) 116,
and references therein.
- [20] C. GIUNTI, C.W. KIM & U.W. LEE: “Remarks on the weak states of neutrinos”, *Phys. Rev. D* 45 (1992) 2414.
- [21] B.A. KNIEHL & A. SIRLIN: “Simple On-Shell Renormalization Framework for the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa Matrix”, *hep-th/0612033*, *Phys. Rev. D* 74 (2006) 116003, and references therein.
- [22] C. BALZEREIT, T. HAMSMANN, T. MANNEL & B. PLÜMPER: “The Renormalization Group Evolution of the CKM Matrix”, *hep-ph/9810350*, *Eur. Phys. J. C* 9 (1999) 197, and references therein.
- [23] P.F. HARRISON, D.H. PERKINS & W.G. SCOTT: “Tri-Bimaximal Mixing and the Neutrino Oscillation Data”, *hep-ph/0202074*, *Phys. Lett. B* 530 (2002) 167.

D.2 Fermions and discrete symmetries in quantum field theory I. Generalities ; the propagator for one flavor

FERMIONS AND DISCRETE SYMMETRIES IN QUANTUM FIELD THEORY.

I. GENERALITIES & THE PROPAGATOR FOR ONE FLAVOR.

Q. Duret ^{1 2} & B. Machet ^{1 3}

Abstract: Starting from Wigner’s symmetry representation theorem, we give a general account of discrete symmetries P , C , T and their products, focusing on fermions in Quantum Field Theory. We deal in full generality with unitary and antiunitary operators and put a special emphasis on the linearity and unitarity of charge conjugation. We provide the rules of transformation of Weyl spinors, both at the classical level (grassmanian functions) and quantum level (operators). Making use of Wightman’s definition of invariance, we outline ambiguities linked to the notion of classical fermionic Lagrangian. We then present the general constraints cast on the fermionic propagator for one flavor by P , C , T and their products.

PACS: 11.10.Cd 11.30.Er

Keywords: spinors, discrete symmetries, propagator

¹LPTHE tour 24-25, 5^{ème} étage, UPMC Univ Paris 06, BP 126, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05 (France),
Unité Mixte de Recherche UMR 7589 (CNRS / UPMC Univ Paris 06)

²duret@lpthe.jussieu.fr

³machet@lpthe.jussieu.fr

1 Introduction

Fermions are usually treated, in most aspects of their phenomenology, as classical, though anticommuting, objects. They are generally endowed with a mass matrix though, for coupled systems¹, this can only be a linear approximation in the vicinity of one among the physical poles of their full (matricial) propagator [1] [2]. In this perspective, the study of neutral kaons [1], and more specially of the role held, there, by discrete symmetries P , C , T and their products, has shown that subtle differences occur between the “classical” treatment obtained from a Lagrangian and a mass matrix, and the full quantum treatment dealing with their propagator. Using a classical approximation for fermions is *a priori* still more subject to caution since, in particular, their anticommutation is of quantum origin. This is why, after the work [1], we decided to perform a not less exhaustive study of coupled fermionic systems in Quantum Field Theory, dealing especially with the propagator approach. Treating fermions on a rigorous ground is all the more important as the very nature, Dirac or Majorana, of neutrinos is still unknown, and that all theoretical results used up to now, concerning specially flavor mixing, rely on a classical Lagrangian (mass matrix).

The second and third parts of this work are dedicated to general statements concerning the discrete symmetries parity P , charge conjugation C , time reversal T , and their products. It does not pretend to be original, but makes a coherent synthesis of results scattered in the literature, and which sometimes contradict each other. Starting from Wigner’s representation theorem [3] and Wightman’s point of view for symmetry transformations [4], we give the general rules of transformations of operators and of their hermitian conjugates by any unitary or antiunitary transformation. We then specialize to transforming Weyl spinors by P , C , T and their products, first when they are considered at the classical level (grassmannian functions), then at the quantum level (anticommuting operators). We put a special emphasis on the properties of unitarity and linearity of the charge conjugation operator, which is sometimes erroneously considered to be antilinear.

The fourth part deals with the concept of invariance of a given theory, still essentially following Wightman [4]. By taking the simple example of fermionic mass terms (Dirac and Majorana), we exhibit ambiguities and inconsistencies that arise in the transformations of a classical Lagrangian by antiunitary transformations. This motivates, like for neutral kaons [7], the propagator approach, which is the only safe way of deducing unambiguously the constraints cast by symmetry transformations on a Quantum Field Theory².

The fifth and last part of this work is dedicated to the propagator of a single fermion (one flavor) and its antiparticle, from which it cannot be separated, in Quantum Field Theory. We derive in full generality all constraints cast on it by P , C , T , PC , PCT . We show that the eigenstates of a $C + PCT$ invariant propagator are, as expected, Majorana fermions.

This study is largely unfinished since the case of several flavors of fermions is not investigated here. This necessary extension, which will give access to the essential issue of flavor mixing, in connection with discrete symmetries, is currently under investigation (we recall that results concerning mixing at the quantum level have already been obtained, by less general techniques, in [6] and [7]).

2 Generalities

In this paper we shall note equivalently $\xi^\alpha \xrightarrow{C} -i(\eta^{\dot{\alpha}})^* \equiv (\xi^\alpha)^c = -i(\eta^{\dot{\alpha}})^* \equiv C.\xi^\alpha = -i(\eta^{\dot{\alpha}})^*$, where ξ^α is a Weyl spinor (see Appendix A.1).

The corresponding fermionic field operators will be put into square brackets, for example $[\xi^\alpha]$, $[\xi^\alpha]^U$, the last being the transformed by the transformation U . Formally $[\xi^\alpha]^U = (\xi^\alpha)^U$.

The transition amplitude between two fermionic states is noted $\langle \chi | \psi \rangle$; this defines a scalar product and the corresponding norm $\langle \psi | \psi \rangle$ is real positive. The scalar product satisfies

$$\langle \psi | \chi \rangle^* = \langle \chi | \psi \rangle; \quad (1)$$

¹Both quarks and leptons form coupled systems through the Higgs sector.

²and more generally its Green functions, from which the S-matrix can be in principle reconstructed [4].

we consider furthermore ([5]) that representations of the Poincaré group satisfy ³

$$\langle \psi | \chi \rangle^* = \langle \psi^* | \chi^* \rangle. \quad (2)$$

2.0.1 The symmetry representation theorem of Wigner [3]

A symmetry transformation is defined as a transformation on the states (ray representations) $\Psi \rightarrow \Psi'$ that preserve transition probabilities

$$|\langle \Psi'_1 | \Psi'_2 \rangle|^2 = |\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle|^2. \quad (3)$$

The so-called “symmetry representation theorem” states ⁴: *any symmetry transformation can be represented on the Hilbert space of physical states by an operator that is either linear and unitary, or antilinear and antiunitary.*

Since we have to deal with unitary as well as antiunitary operators, it is important to state their general properties and how they operate on fermionic field operators. A unitary operator \mathcal{U} and an antiunitary operator \mathcal{A} satisfy respectively

$$\forall \psi, \chi \quad \langle \mathcal{U}\psi | \mathcal{U}\chi \rangle = \langle \psi | \chi \rangle, \quad \langle \mathcal{A}\psi | \mathcal{A}\chi \rangle = \langle \chi | \psi \rangle = \langle \psi | \chi \rangle^*. \quad (4)$$

Both preserve the probability transition $|\langle \psi | \chi \rangle|^2 = |\langle \mathcal{U}\psi | \mathcal{U}\chi \rangle|^2 = |\langle \mathcal{A}\psi | \mathcal{A}\chi \rangle|^2$.

2.0.2 Antiunitarity and antilinearity

An antilinear operator is an operator that complex conjugates any c-number on its right

$$\mathcal{A} \text{ antilinear} \Leftrightarrow \mathcal{A}(c | \psi \rangle) = c^* \mathcal{A} | \psi \rangle. \quad (5)$$

An antiunitary operator is also antilinear. Let us indeed consider the antiunitary operator \mathcal{A} .

$\langle \mathcal{A}\psi | \mathcal{A} | \lambda \chi \rangle = \langle \mathcal{A}\psi | \mathcal{A}\lambda \chi \rangle = \langle \lambda \chi | \psi \rangle = \lambda^* \langle \chi | \psi \rangle = \lambda^* \langle \mathcal{A}\psi | \mathcal{A} | \chi \rangle$ shows that \mathcal{A} is antilinear.

2.0.3 Unitarity and linearity

In the same way, one shows that: a unitary operator is linear.

2.0.4 Symmetry transformations: Wightman’s point of view

Wightman [4] essentially deals with vacuum expectation values of strings of field operators. The transformed $\hat{\mathcal{O}}$ of an operator \mathcal{O} is defined through the transformation that changes the state ϕ into $\hat{\phi}$

$$\langle \hat{\phi} | \mathcal{O} | \hat{\phi} \rangle = \langle \phi | \hat{\mathcal{O}} | \phi \rangle \quad (6)$$

One has accordingly:

* for a unitary transformation \mathcal{U}

$$\hat{\mathcal{O}} = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{O} \mathcal{U}, \quad (7)$$

³For fermionic scalar products, we refer the reader to [8].

⁴We refer the reader to [9] for a careful demonstration of this theorem.

* for an antiunitary transformation \mathcal{A} ^{5 6}

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{O}} &= (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A})^\dagger \\ &= \mathcal{A}^\dagger\mathcal{O}^\dagger(\mathcal{A}^{-1})^\dagger = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{O}^\dagger\mathcal{A}.\end{aligned}\quad (9)$$

This is the demonstration.

* For \mathcal{U} unitary ($\mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger = 1 = \mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}$):

$$\langle \mathcal{U}\psi | \mathcal{O} | \mathcal{U}\chi \rangle = \langle \psi | \mathcal{U}^\dagger\mathcal{O}\mathcal{U} | \chi \rangle = \langle \psi | \mathcal{U}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{U} | \chi \rangle, \text{ q.e.d.}$$

* For \mathcal{A} antiunitary:

- first, we demonstrate the important relation

$$\forall(\psi, \chi) \quad \langle \mathcal{A}\psi | \mathcal{A}\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1} | \mathcal{A}\chi \rangle = \langle \chi | \mathcal{O}^\dagger | \psi \rangle. \quad (10)$$

Indeed:

$$\langle \mathcal{A}\psi | \mathcal{A}\mathcal{O}\mathcal{A}^{-1} | \mathcal{A}\chi \rangle = \langle \mathcal{A}\psi | \mathcal{A}\mathcal{O} | \chi \rangle = \langle \mathcal{A}\psi | \mathcal{A}(\mathcal{O}\chi) \rangle \stackrel{(4)}{=} \langle \mathcal{O}\chi | \psi \rangle = \langle \chi | \mathcal{O}^\dagger | \psi \rangle;$$

- one has then, in particular⁷

$$\langle \mathcal{A}\psi | \mathcal{O} | \mathcal{A}\chi \rangle = \langle \mathcal{A}\psi | \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A})\mathcal{A}^{-1} | \mathcal{A}\chi \rangle = \langle \chi | (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A})^\dagger | \psi \rangle, \quad (12)$$

which yields the desired result for $\psi = \chi$ ⁸.

According to (9), an extra hermitian conjugation occurs in the transformation of an operator by an antiunitary transformation⁹.

2.0.5 General constraints

$\langle \hat{\phi} | \mathcal{O}^\dagger | \hat{\phi} \rangle \stackrel{(6)}{=} \langle \phi | \widehat{\mathcal{O}^\dagger} | \phi \rangle$ evaluates also as $\langle \hat{\phi} | \mathcal{O}^\dagger | \hat{\phi} \rangle = \langle \hat{\phi} | \mathcal{O} | \hat{\phi} \rangle^* \stackrel{(6)}{=} \langle \phi | \widehat{\mathcal{O}} | \phi \rangle^* = \langle \phi | (\widehat{\mathcal{O}})^\dagger | \phi \rangle$, such that, comparing the two expressions one gets

$$\widehat{\mathcal{O}^\dagger} = (\widehat{\mathcal{O}})^\dagger, \quad (13)$$

which is a constraint that must be satisfied by any operator \mathcal{O} transformed by unitary as well as antiunitary symmetry transformations. (13) can easily be checked explicitly. $[\psi]$ being the field operator associated with the grassmanian function ψ , one has:

* for a unitary transformation \mathcal{U} :

$$\begin{aligned}\widehat{[\psi]}^\dagger &\stackrel{(7)}{=} \mathcal{U}^{-1} [\psi]^\dagger \mathcal{U}, \\ \widehat{[\psi]}^\dagger &\stackrel{(13)}{=} ([\hat{\psi}])^\dagger \stackrel{(7)}{=} (\mathcal{U}^{-1} [\psi] \mathcal{U})^\dagger \stackrel{\mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger=1=\mathcal{U}^\dagger\mathcal{U}}{=} \mathcal{U}^{-1} [\psi]^\dagger \mathcal{U};\end{aligned}\quad (14)$$

⁵The last equality in (9) comes from the property, demonstrated by Weinberg [9], that an antiunitary operator must also satisfy the relation $\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = 1 = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}$ (see Appendix B). So, in particular, one has $(\mathcal{A}^{-1})^\dagger\mathcal{A}^{-1} = 1 \Rightarrow (\mathcal{A}^{-1})^\dagger = \mathcal{A}$.

⁶Because of (9), for $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 \dots \mathcal{O}_n$

$$\begin{aligned}[\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 \dots \mathcal{O}_n]^\Theta &= (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 \dots \mathcal{O}_n\mathcal{A})^\dagger = (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}_1\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}_2\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} \dots \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}_n\mathcal{A})^\dagger \\ &= (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}_n\mathcal{A})^\dagger \dots (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}_2\mathcal{A})^\dagger (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}_1\mathcal{A})^\dagger \\ &= [\mathcal{O}_n]^\Theta \dots [\mathcal{O}_2]^\Theta [\mathcal{O}_1]^\Theta;\end{aligned}\quad (8)$$

antiunitarity implies that the order of operators has to be swapped when calculating the transformed of a string of operators.

⁷When the *in* and *out* states are different, one can write accordingly

$$\langle \mathcal{A}\psi | \mathcal{O} | \mathcal{A}\chi \rangle = \langle \chi | \widehat{\mathcal{O}} | \psi \rangle = \langle \chi | (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A})^\dagger | \psi \rangle \quad (11)$$

The *in* and *out* states have to be swapped in the expressions on the r.h.s., ensuring that all terms in (11) are linear in ψ and antilinear in χ .

⁸One cannot use (137) to transform $\langle \chi | (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A})^\dagger | \psi \rangle$ into $\langle \psi | \mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A} | \chi \rangle$ because $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A}$ acts linearly and should thus be considered as a unitary operator.

⁹See [4], eq.(1-30).

* for a antiunitary transformation \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \widehat{[\psi]^\dagger} &\stackrel{(9)}{=} (\mathcal{A}^{-1} [\psi]^\dagger \mathcal{A})^\dagger = \mathcal{A}^\dagger [\psi] \mathcal{A}, \\ \widehat{[\psi]^\dagger} &\stackrel{(13)}{=} (\mathcal{A}^\dagger [\psi]^\dagger \mathcal{A})^\dagger = \mathcal{A}^\dagger [\psi] \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (15)$$

Since $[\psi]$ and $[\psi]^\dagger$ are respectively associated with the grassmanian functions ψ and ψ^* , (13) also casts constraints on the transformation of grassmanian functions:

$$\widehat{\psi^*} = (\hat{\psi})^*. \quad (16)$$

3 Discrete symmetries

3.1 Parity transformations

We adopt the convention $P^2 = -1$ [10]. Then the transformation of spinors are

$$\begin{aligned} \xi^\alpha(\vec{x}, t) &\xrightarrow{P} i\eta_{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t) \quad , \quad \eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} i\xi^\alpha(-\vec{x}, t), \\ \xi_\alpha(\vec{x}, t) &\xrightarrow{P} -i\eta^{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t) \quad , \quad \eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} -i\xi_\alpha(-\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (17)$$

The parity transformed of the complex conjugates are defined [10] as the complex conjugates of the parity transformed

$$P.(\xi^\alpha)^* = (P.\xi^\alpha)^*; \quad (18)$$

this ensures in particular that the constraints (13) and (16) are satisfied. It yields

$$\begin{aligned} (\xi^\alpha)^*(\vec{x}, t) &\xrightarrow{P} -i(\eta_{\dot{\alpha}})^*(-\vec{x}, t) \quad , \quad (\eta_{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} -i(\xi^\alpha)^*(-\vec{x}, t), \\ (\xi_\alpha)^*(\vec{x}, t) &\xrightarrow{P} i(\eta^{\dot{\alpha}})^*(-\vec{x}, t) \quad , \quad (\eta^{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{P} i(\xi_\alpha)^*(-\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (19)$$

For Dirac bi-spinors (see Appendix A), one gets

$$P.\psi_D = U_P \psi_D, \quad U_P = i\gamma^0, U_P^\dagger = -U_P = U_P^{-1}, U_P^2 = -1, U_P^\dagger U_P = 1. \quad (20)$$

3.1.1 Parity transformation on fermionic field operators

Going to field operators, one uses (7), for unitary operators

$$[\xi^\alpha]^P = P^{-1}[\xi^\alpha]P \quad (21)$$

to get

$$\begin{aligned} P^{-1}\xi^\alpha(\vec{x}, t)P &= i\eta_{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t) \quad , \quad P^{-1}\eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t)P = i\xi^\alpha(-\vec{x}, t), \\ P^{-1}\xi_\alpha(\vec{x}, t)P &= -i\eta^{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t) \quad , \quad P^{-1}\eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t)P = -i\xi_\alpha(-\vec{x}, t), \\ P^{-1}(\xi^\alpha)^\dagger(\vec{x}, t)P &= -i(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(-\vec{x}, t) \quad , \quad P^{-1}(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, t)P = -i(\xi^\alpha)^\dagger(-\vec{x}, t), \\ P^{-1}(\xi_\alpha)^\dagger(\vec{x}, t)P &= i(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(-\vec{x}, t) \quad , \quad P^{-1}(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, t)P = i(\xi_\alpha)^\dagger(-\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (22)$$

which satisfies the constraint (13). The following constraint then arises

$$(P^{-1})^2 \xi^\alpha P^2 = -\xi^\alpha. \quad (23)$$

Indeed: $(P^{-1})^2 \xi^\alpha P^2 = P^{-1}(P^{-1}\xi^\alpha P)P \stackrel{(22)}{=} P^{-1}i\eta_{\dot{\alpha}}P \stackrel{\text{linear}}{=} i P^{-1}\eta_{\dot{\alpha}}P \stackrel{(22)}{=} -\xi^\alpha$.

Taking the hermitian conjugate of the first equation of the first line in (22) and comparing it with the first equation of the third line, it is also immediate to check that $(PP^\dagger)\mathcal{O}(PP^\dagger)^{-1} = \mathcal{O}$, $\mathcal{O} = \xi^\alpha \dots$, which is correct for P unitary or antiunitary.

3.2 Charge conjugation as a linear (unitary) operator

C is the operation which transforms a particle into its antiparticle, and *vice versa*, without changing its spin and momentum (see for example [11] p.17); it satisfies $C^2 = 1$ [10]

A Dirac fermion and its charge conjugate transform alike [10] and satisfy the same equation; the charge conjugate satisfies

$$C.\psi_D = V_C \overline{\psi_D}^T, \quad (24)$$

where V_C is a unitary operator

$$V_C = \gamma^2 \gamma^0, \quad (V_C)^\dagger V_C = 1 = (V_C)^2; \quad (25)$$

this action on Dirac fermions is generally taken as the definition of C . Equivalently

$$C.\psi_D = U_C \psi_D^*, \quad U_C = V_C \gamma^0 = \gamma^2, \quad U_C^\dagger U_C = 1 = -(U_C)^2. \quad (26)$$

Naively considering (24) (as often done) entails

$$C.(\lambda \psi_D) = \lambda^* C.(\psi_D), \quad (27)$$

which leads to consider that C acts antilinearly on ψ_D . We show below, after eq. (31), that this is a mistake and that C should act linearly, otherwise PCT becomes linear and unitary, which is wrong.

In terms of Weyl fermions (see Appendix A), one has

$$\psi_D \equiv \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \xrightarrow{C} -i \begin{pmatrix} \eta^{\dot{\alpha}*} \\ \xi_\beta^* \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} g^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \eta_{\dot{\beta}}^* \\ g_{\alpha\beta} \xi^{\beta*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^2 \eta_{\dot{\beta}}^* \\ \sigma_{\alpha\beta}^2 \xi^{\beta*} \end{pmatrix} = \gamma^2 \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}^* = \gamma^2 \psi_D^*, \quad (28)$$

and, so

$$\begin{aligned} \xi^\alpha &\xrightarrow{C} -i \eta^{\dot{\alpha}*}, & \eta_{\dot{\alpha}} &\xrightarrow{C} -i \xi_\alpha^*, \\ \xi_\alpha &\xrightarrow{C} -i \eta_{\dot{\alpha}}^*, & \eta^{\dot{\alpha}} &\xrightarrow{C} -i \xi^{\alpha*}. \end{aligned} \quad (29)$$

The transformation of complex conjugates fields results from the constraint (16), which imposes

$$\begin{aligned} (\xi^\alpha)^* &\xrightarrow{C} i \eta^{\dot{\alpha}}, & (\eta_{\dot{\alpha}})^* &\xrightarrow{C} i \xi_\alpha, \\ (\xi_\alpha)^* &\xrightarrow{C} i \eta_{\dot{\alpha}}, & (\eta^{\dot{\alpha}})^* &\xrightarrow{C} i \xi^\alpha. \end{aligned} \quad (30)$$

It is now easy to show that (recall that $U_C^2 = -1$ from (26))

$$C^2 = 1, C \text{ unitary and linear.} \quad (31)$$

One gets then: $C.C.\xi^\alpha = C.(-i(\eta^{\dot{\alpha}})^*) \stackrel{\text{linear}}{=} (-i)C.(\eta^{\dot{\alpha}})^* \stackrel{(30)}{=} \xi^\alpha$, which entails, as needed, $C^2 = 1$.

If (16) is satisfied (that is, accordingly, if (30) is true together with (29)), but if we take C antilinear (thus antiunitary), by operating a second time with C on the l.h.s. of (29) or (30), one finds that it can only satisfy $C^2 = -1$ instead of $C^2 = 1$. The commutation and anticommutation relations with other symmetry transformations P and T are also changed¹⁰, which swaps in particular the sign of $(PCT)^2$. Furthermore, since T is antilinear and P is linear, this makes PCT linear, thus unitary, which is wrong. (16) is thus only compatible with unitarity and linearity for C .

If (16) is not satisfied, that is, if the signs of (30) are swapped, one can keep $C^2 = 1$ at the price of taking C antilinear. Then it can only be non-unitary, which is in conflict with all assertions. Also, unless we abandon the natural correspondence $\psi \leftrightarrow [\psi]$, $\psi^* \leftrightarrow [\psi]^\dagger$ between fields and operators, (13) cannot be

¹⁰With our conventions, we have $CP = PC$, $(PC)^2 = -1$, and $(PCT)^2 = 1$.

satisfied either, which creates a problem with Wightman's definition (6) of the transformed of an operator by a symmetry transformation (in the sense of Wigner).

So, despite C complex conjugates a Dirac spinor, it should act linearly $C.\lambda\psi = \lambda C.\psi$. (24) and its consequence (27) should not be considered as the basic equations defining C transformation; they should be supplemented by the condition of unitarity (hence linearity). This brings no trouble with the property that a fermion and its charge conjugate transform alike and satisfy the same equation [10]. Indeed, if ψ_D is a Dirac fermion, $\lambda\psi_D$ satisfies the same Dirac equation since the latter is linear in ψ ; if ψ^C transforms alike by Lorentz and satisfies the same Dirac equation, too, both $\lambda\psi^C$ and $\lambda^*\psi^C$ also do. Linearity or antilinearity is not fixed by the two conditions "transforming alike by Lorentz" and "satisfying the same equation", such that this property must be determined by other criteria.

See also appendix D, where a careful analysis is done of the pitfalls that accompany the use of γ matrices in the expression of the discrete transformations P , C and T .

3.2.1 Charge conjugation on field operators

The transition from (29) and (30) for grassmanian functions to the transformations for field operators is done according to (7) for *unitary* operators, through the correspondence $\mathcal{U}\psi \leftrightarrow \mathcal{U}^{-1}[\psi]\mathcal{U}$. One gets

$$\begin{aligned} C^{-1}\xi^\alpha C &= -i(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger, & C^{-1}\eta_{\dot{\alpha}} C &= -i(\xi_\alpha)^\dagger, \\ C^{-1}\xi_\alpha C &= -i(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger, & C^{-1}\eta^{\dot{\alpha}} C &= -i(\xi^\alpha)^\dagger, \\ C^{-1}(\xi^\alpha)^\dagger C &= i(\eta^{\dot{\alpha}}), & C^{-1}(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger C &= i(\xi_\alpha), \\ C^{-1}(\xi_\alpha)^\dagger C &= i(\eta_{\dot{\alpha}}), & C^{-1}((\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger C &= i(\xi^\alpha). \end{aligned} \quad (32)$$

Hermitian conjugating the first equation of the first line of (32) immediately shows its compatibility with the first equation of the third line: $C^\dagger(\xi^\alpha)^\dagger(C^{-1})^\dagger = i\eta^{\dot{\alpha}} = C^{-1}(\xi^\alpha)^\dagger C \Rightarrow (\xi^\alpha)^\dagger = CC^\dagger(\xi^\alpha)^\dagger(C^{-1})^\dagger C^{-1}$, which entails $CC^\dagger = \pm 1$ which is correct for C unitary (or antiunitary). We would find an inconsistency if the sign of the last four equations was swapped.

Since C is linear, one immediately gets

$$(C^{-1})^2 \mathcal{O} C^2 = C^{-1}(C^{-1} \mathcal{O} C)C = \mathcal{O}, \mathcal{O} = \xi^\alpha \dots \quad (33)$$

3.3 PC transformation

Combining (17), (29) and (30), and using, when needed, the linearity of C , one gets

$$\begin{aligned} \xi^\alpha(\vec{x}, t) &\xrightarrow{PC} \xi_\alpha^*(-\vec{x}, t), & \xi_\alpha(\vec{x}, t) &\xrightarrow{PC} -\xi^{\alpha*}(-\vec{x}, t), \\ \eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) &\xrightarrow{PC} \eta^{\dot{\alpha}*}(-\vec{x}, t), & \eta^{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t) &\xrightarrow{PC} -\eta_{\dot{\alpha}}^*(-\vec{x}, t), \end{aligned} \quad (34)$$

and

$$\begin{aligned} (\xi^\alpha)^*(\vec{x}, t) &\xrightarrow{PC} \xi_\alpha(-\vec{x}, t), & (\xi_\alpha)^*(\vec{x}, t) &\xrightarrow{PC} -\xi^\alpha(-\vec{x}, t), \\ (\eta_{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) &\xrightarrow{PC} \eta^{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t), & (\eta^{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) &\xrightarrow{PC} -\eta_{\dot{\alpha}}(-\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (35)$$

One easily checks that $(PC)^2 = -1$.

Like for charge conjugation, one has

$$PC.(\xi^\alpha)^* = (PC.\xi^\alpha)^*. \quad (36)$$

For a Dirac fermion, one has

$$\begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \xrightarrow{PC} \begin{pmatrix} \xi_\alpha^* \\ \eta^{\dot{\beta}*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} \xi^{\beta*} \\ g^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \eta_{\dot{\gamma}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i\sigma^2)_{\alpha\beta} \xi^{\beta*} \\ (-i\sigma^2)_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} \eta_{\dot{\gamma}}^* \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} (\eta_{\dot{\alpha}})^c \\ (\xi^\beta)^c \end{pmatrix} = i\gamma^0\gamma^2 \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}^*, \quad (37)$$

equivalently

$$PC.\psi_D = V_{PC}\bar{\psi}^T = U_P V_C \bar{\psi}^T = U_{PC}\psi^* = U_P U_C \psi^*. \quad (38)$$

Majorana fermions (see subsection 3.6) $\psi_M^\pm = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \pm(-i)\xi_\beta^* \end{pmatrix}$ and $\chi_M^\pm = \begin{pmatrix} \pm(-i)(\eta^\beta)^* \\ \eta_\beta \end{pmatrix}$ have PC parity $\pm i$ ¹¹.

3.4 Time reversal

The time reversed $\langle \chi(t') | \psi(t) \rangle$ of a transition matrix element $\langle \chi(t') | \psi(t) \rangle$, $t < t'$ is defined by $\langle \chi(t) | \psi(t') \rangle^* = \langle \psi(t') | \chi(t) \rangle$, $t > t'$; the complex conjugation is made necessary by $t < t'$ and the fact that *in* states must occur at a time smaller than *out* states; the arrow of time is not modified when one defines the time-reversed of a transition matrix element.

The operator T is accordingly antiunitary, hence antilinear:

$$\langle TA | TB \rangle = \langle B | A \rangle \Rightarrow T \text{ antiunitary}, \quad (39)$$

In Quantum Mechanics, time reversal must change grassmanian functions into their complex conjugate (see for example the argumentation concerning Schrödinger's equation in [11]). According to [10], the *grassmanian functions* transform by time inversion according to

$$\begin{aligned} \psi_D(\vec{x}, t) &\xrightarrow{T} T.\psi_D(\vec{x}, t) = \overline{V_T \psi_D(\vec{x}, -t)}^T; \\ V_T &= i\gamma^3 \gamma^1 \gamma^0, \quad V_T^\dagger V_T = 1 = V_T^2, \quad V_T^\dagger = V_T = V_T^{-1}, \end{aligned} \quad (40)$$

which shows that T is antilinear when it acts on grassmanian functions. So doing, $T.\psi_D$ and ψ_D satisfy time reversed equations. One also defines

$$U_T = V_T \gamma^0 = i\gamma^3 \gamma^1 = -U_T^*, \quad U_T^\dagger = U_T = U_T^{-1}, \quad U_T^\dagger U_T = U_T^2 = 1. \quad (41)$$

$$T.\psi_D = U_T \psi_D^* = i\gamma^3 \gamma^1 \psi_D^*. \quad (42)$$

This yields for Weyl fermions

$$\begin{aligned} \xi^\alpha(\vec{x}, t) &\xrightarrow{T} -i\xi_\alpha^*(\vec{x}, -t) \quad , \quad \xi_\alpha(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} i\xi^{\alpha*}(\vec{x}, -t), \\ \eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) &\xrightarrow{T} i\eta^{\dot{\alpha}*}(\vec{x}, -t) \quad , \quad \eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} -i\eta_{\dot{\alpha}}^*(\vec{x}, -t). \end{aligned} \quad (43)$$

The constraint (16) then entails

$$\begin{aligned} (\xi^\alpha)^*(\vec{x}, t) &\xrightarrow{T} i\xi_\alpha(\vec{x}, -t) \quad , \quad (\xi_\alpha)^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} -i\xi^\alpha(\vec{x}, -t), \\ (\eta_{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) &\xrightarrow{T} -i\eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, -t) \quad , \quad (\eta^{\dot{\alpha}})^*(\vec{x}, t) \xrightarrow{T} i\eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, -t). \end{aligned} \quad (44)$$

One has

$$T^2 = 1, \quad CT = -TC, \quad PT = TP \quad (45)$$

¹¹For example, $PC. \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ (\eta_{\dot{\beta}})^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha^* \\ i\xi^\beta \end{pmatrix} = i\gamma^0 \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ (\eta_{\dot{\beta}})^c \end{pmatrix}$.

3.4.1 Time reversal on fermionic field operators

The transition to field operators is done according to (9) for antiunitary transformations, through the correspondence $(\mathcal{A}\psi)^\dagger \leftrightarrow \mathcal{A}^{-1}[\psi]\mathcal{A}$, which involves an extra hermitian conjugation with respect to the transformations of grassmanian functions ([4], eq.(1-30)):

$$\begin{aligned} T^{-1}\xi^\alpha(\vec{x}, t)T &= i\xi_\alpha(\vec{x}, -t) \quad , \quad T^{-1}\eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t)T = -i\eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, -t), \\ T^{-1}\xi_\alpha(\vec{x}, t)T &= -i\xi^\alpha(\vec{x}, -t) \quad , \quad T^{-1}\eta^{\dot{\alpha}}(\vec{x}, t)T = i\eta_{\dot{\alpha}}(\vec{x}, -t), \\ T^{-1}(\xi^\alpha)^\dagger(\vec{x}, t)T &= -i(\xi_\alpha)^\dagger(\vec{x}, -t) \quad , \quad T^{-1}(\xi_\alpha)^\dagger(\vec{x}, t)T = i(\xi^\alpha)^\dagger(\vec{x}, -t), \\ T^{-1}(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, t)T &= i(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, -t) \quad , \quad T^{-1}(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, t)T = -i(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(\vec{x}, -t). \end{aligned} \quad (46)$$

Since T is antilinear, one finds immediately that, though $T^2 = 1$, one must have

$$(T^{-1})^2 \mathcal{O} T^2 = T^{-1}(T^{-1} \mathcal{O} T)T = -\mathcal{O}, \mathcal{O} = \xi^\alpha \dots \quad (47)$$

3.5 PCT transformation

Combining the previous results, using the linearity of P and C , one gets for the grassmanian functions ¹²

$$\begin{aligned} \xi^\alpha(x) &\xrightarrow{PCT} i\xi^\alpha(-x) \quad , \quad \eta_{\dot{\alpha}}(x) \xrightarrow{PCT} -i\eta_{\dot{\alpha}}(-x), \\ \xi_\alpha(x) &\xrightarrow{PCT} i\xi_\alpha(-x) \quad , \quad \eta^{\dot{\alpha}}(x) \xrightarrow{PCT} -i\eta^{\dot{\alpha}}(-x), \\ \psi_D(x) &\xrightarrow{PCT} i\gamma^5\psi_D(-x), \end{aligned} \quad (48)$$

where the overall sign depends on the order in which the operators act; here they are supposed to act in the order: first T , then C and last P . When acting on bispinors, one has $CT = -TC$ and $PT = TP$ ¹³. So, using also $CP = PC$, one gets $(PCT)(PCT) = (PCT)(P(-)TC) = (PCT)(-TPC)$. $T^2 = 1$, $C^2 = 1$, $P^2 = -1$ (our choice) and $PC = CP$ entail

$$(PCT)^2 = 1. \quad (49)$$

Note that, both C and T introducing complex conjugation, the latter finally disappears and PCT introduces no complex conjugation for the grassmanian functions. This is why one has

$$PCT.\psi_D(x) = U_\Theta\psi_D(-x), \quad (50)$$

$$U_\Theta = U_P U_C U_T = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = i\gamma^5, \quad U_\Theta U_\Theta^\dagger = 1 = -U_\Theta^2, \quad U_\Theta^\dagger = -U_\Theta. \quad (51)$$

For the complex conjugate fields, the constraint (16) gives

$$\begin{aligned} (\xi^\alpha)^*(x) &\xrightarrow{PCT} -i(\xi^\alpha)^*(-x) \quad , \quad (\eta_{\dot{\alpha}})^*(x) \xrightarrow{PCT} i(\eta_{\dot{\alpha}})^*(-x), \\ (\xi_\alpha)^*(x) &\xrightarrow{PCT} -i(\xi_\alpha)^*(-x) \quad , \quad (\eta^{\dot{\alpha}})^*(x) \xrightarrow{PCT} i(\eta^{\dot{\alpha}})^*(-x), \\ \psi_D^*(x) &\xrightarrow{PCT} -i\gamma^5\psi_D^*(-x), \end{aligned} \quad (52)$$

such that (this only occurs for P and PCT)

$$PCT.(\xi^\alpha)^* = (PCT.\xi^\alpha)^* \Leftrightarrow U_\Theta(\xi^\alpha)^* \equiv ((\xi^\alpha)^*)^\Theta = (U_\Theta\xi^\alpha)^* \equiv ((\xi^\alpha)^\Theta)^*. \quad (53)$$

Since P and C are unitary and T antiunitary, PCT is antiunitary, thus *antilinear*. So, despite no complex conjugation is involved $\Theta.\lambda\xi^\alpha = \lambda^*\Theta.\xi^\alpha$ ¹⁴.

¹²Examples:

$PCT.\xi^\alpha = PC.(T.\xi^\alpha) = PC.(-i\xi_\alpha^*) = P.(-i)C.\xi_\alpha^* = (-i)P.C.\xi_\alpha^* = (-i)P.i\eta_{\dot{\alpha}} = P.\eta_{\dot{\alpha}} = i\xi^\alpha$;
 $PCT.(\xi^\alpha)^* = PC.(T.(\xi^\alpha)^*) = PC.(i\xi_\alpha) = P.iC.\xi_\alpha = iP.(-i)(\eta_{\dot{\alpha}})^* = P.(\eta_{\dot{\alpha}})^* = -i(\xi^\alpha)^*$.

¹³We disagree with [10] who states that T and P anticommute.

¹⁴This is to be put in correspondence with C , which is *linear* despite complex conjugation is involved.

3.5.1 PCT operation on fermionic field operators

Since Θ is antiunitary, one has, according to (9)

$$\begin{aligned}\Theta^{-1}\xi^\alpha(x)\Theta &= -i(\xi^\alpha)^\dagger(-x) \quad , \quad \Theta^{-1}\xi_\alpha(x)\Theta = -i(\xi_\alpha)^\dagger(-x), \\ \Theta^{-1}\eta_{\dot{\alpha}}(x)\Theta &= i(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(-x) \quad , \quad \Theta^{-1}\eta^{\dot{\alpha}}(x)\Theta = i(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(-x), \\ \Theta^{-1}(\xi^\alpha)^\dagger(x)\Theta &= i\xi^\alpha(-x) \quad , \quad \Theta^{-1}(\xi_\alpha)^\dagger(x)\Theta = i\xi_\alpha(-x), \\ \Theta^{-1}(\eta_{\dot{\alpha}})^\dagger(x)\Theta &= -i\eta_{\dot{\alpha}}(-x) \quad , \quad \Theta^{-1}(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger(x)\Theta = -i\eta^{\dot{\alpha}}(-x).\end{aligned}\quad (54)$$

and, using the antilinearity of Θ , one gets

$$(\Theta^{-1})^2 \mathcal{O} \Theta^2 = \Theta(\Theta^{-1} \mathcal{O} \Theta)\Theta = -\mathcal{O}, \mathcal{O} = \xi^\alpha \dots \quad (55)$$

3.6 Majorana fermions

A Majorana fermion is a bi-spinor which is a C eigenstate (it is a special kind of Dirac fermion with half as many degrees of freedom); since $C^2 = 1$, the only two possible eigenvalues are $C = +1$ and $C = -1$; thus, a Majorana fermions must satisfy (see (28)) one of the two possible Majorana conditions

$$* -i\eta^{\dot{\alpha}*} = \pm \xi^\alpha \Leftrightarrow \eta^{\dot{\alpha}} = \pm(-i)\xi^{\alpha*} \Leftrightarrow \eta_{\dot{\beta}} = \pm(-i)\xi_{\beta}^*;$$

$$* -i\xi_{\beta}^* = \pm \eta_{\dot{\beta}}, \text{ which is the same condition as above;}$$

so,

$$\psi_M^\pm = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \pm(-i)\xi_{\beta}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \pm(-i)g_{\alpha\beta}\xi^{\beta*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \pm\sigma_{\alpha\beta}^2 \xi^{\beta*} \end{pmatrix}; \quad (56)$$

the $+$ sign in the lower spinor corresponds to $C = +1$ and the $-$ sign to $C = -1$ ¹⁵.

The Majorana conditions linking ξ and η are

$$\xi^\alpha \stackrel{C=\pm 1}{=} \pm(-i)(\eta^{\dot{\alpha}})^* \Leftrightarrow \eta_{\dot{\beta}} \stackrel{C=\pm 1}{=} \pm(-i)(\xi_{\beta})^*; \quad (57)$$

using formulæ(29,30) for the charge conjugates of Weyl fermions, they also write

$$\xi^\alpha \stackrel{C=\pm 1}{=} \pm(\xi^\alpha)^c, \quad \eta_{\dot{\beta}} \stackrel{C=\pm 1}{=} \pm(\eta_{\dot{\beta}})^c. \quad (58)$$

A Majorana bi-spinor can accordingly also be written¹⁶

$$\chi_M^\pm = \begin{pmatrix} \pm(-i)(\eta^{\dot{\beta}})^* \\ \eta_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}, \quad (60)$$

¹⁵Remark: Arguing that $(-i)(\xi_{\beta})^*$ transforms like a right fermion, we can call $\omega_{\dot{\beta}} = (-i)(\xi_{\beta})^*$, and the Majorana fermion

ψ_M^+ rewrites $\psi_M^+ = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \omega_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}$. If we then calculate its charge conjugate according to the standard rules (29), one gets $\psi_M^+ \xrightarrow{C}$

$\begin{pmatrix} -i(\omega^{\dot{\alpha}})^\dagger \\ -i(\xi_\alpha)^* \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ -i(\xi_\alpha)^* \end{pmatrix}$, which shows that it is indeed a $C = +1$ eigenstate. The argumentation becomes trivial

if one uses for Majorana fermions the same formula for charge conjugation as the one at the extreme right of (28) for Dirac fermions $(\psi_M)^c = \gamma^2(\psi_M)^*$, $(\chi_M)^c = \gamma^2(\chi_M)^*$.

¹⁶The Majorana spinors ψ_M^\pm and χ_M^\pm can also be written

$$\psi_M^\pm = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \pm(-i)(\xi^\alpha)^{CP} \end{pmatrix}, \quad \chi_M^\pm = \begin{pmatrix} \pm(-i)(\eta_{\dot{\beta}})^{CP} \\ \eta_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}; \quad (59)$$

they involve one Weyl spinor and its CP conjugate (see subsection 3.3).

which is identical to ψ_M^\pm by the relations (57). By charge conjugation, using (29), $\psi_M^+ \xrightarrow{C} \chi_M^+, \psi_M^- \xrightarrow{C} -\chi_M^-$.

A so-called Majorana mass term writes

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_M \psi_M &\equiv \psi_M^\dagger \gamma^0 \psi_M \equiv \pm i [-(\xi^\alpha)^* (\xi_\alpha)^* + \xi_\alpha \xi^\alpha] = \pm i [(\xi_\alpha)^* (\xi^\alpha)^* + \xi_\alpha \xi^\alpha] \\ \text{or } \overline{\psi}_M \gamma^5 \psi_M &\equiv \psi_M^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \psi_M \equiv \mp i [(\xi^\alpha)^* (\xi_\alpha)^* + \xi_\alpha \xi^\alpha] = \mp i [-(\xi_\alpha)^* (\xi^\alpha)^* + \xi_\alpha \xi^\alpha]. \end{aligned} \quad (61)$$

Along the same lines, Majorana kinetic terms write $\overline{\psi}_M \gamma^\mu \overleftrightarrow{p}_\mu \psi_M$ or $\overline{\psi}_M \gamma^\mu \gamma^5 \overleftrightarrow{p}_\mu \psi_M$; they rewrite in terms of Weyl spinors (using (135))

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_M \gamma^\mu \overleftrightarrow{p}_\mu \psi_M &= \psi_M^\dagger \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \end{pmatrix} \psi_M \\ &= (\xi^\alpha)^* \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \xi^\beta + (\pm (-i)(\xi_\alpha)^*)^* \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} (\pm (-i)\xi_\beta^*) \\ &= (\xi^\alpha)^* \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \xi^\beta + \xi_\alpha \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \xi_\beta^*, \end{aligned} \quad (62)$$

and

$$\begin{aligned} \overline{\psi}_M \gamma^\mu \gamma^5 \overleftrightarrow{p}_\mu \psi_M &= \psi_M^\dagger \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} & 0 \\ 0 & \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \end{pmatrix} \gamma^5 \psi_M \\ &= (\xi^\alpha)^* \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \xi^\beta - (\pm (-i)(\xi_\alpha)^*)^* \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} (\pm (-i)\xi_\beta^*) \\ &= (\xi^\alpha)^* \overleftrightarrow{(p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \xi^\beta - \xi_\alpha \overleftrightarrow{(p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})} \xi_\beta^*. \end{aligned} \quad (63)$$

A Dirac fermion can always be written as the sum of two Majorana's (the first has $C = +1$ and the second

$$C = -1): \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_\beta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \xi^\alpha - i(\eta^\alpha)^* \\ -i\xi_\beta^* + \eta_\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi^\alpha + i(\eta^\alpha)^* \\ i\xi_\beta^* + \eta_\beta \end{pmatrix} \right].$$

While a Dirac fermion \pm its charge conjugate is always a Majorana fermion ($C = \pm 1$), any Majorana fermion (*i.e.* a general bi-spinor which is a C eigenstate) cannot be uniquely written as the sum of a given Dirac fermion \pm its charge conjugate; suppose indeed that a $C = +1$ Majorana fermion is written

like the sum of a Dirac fermion + its charge conjugate $\begin{pmatrix} \theta^\alpha \\ -i\theta_\beta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^\alpha - i(\eta^\alpha)^* \\ \eta_\beta - i\xi_\beta^* \end{pmatrix}$; since the

two corresponding equations are not independent, ξ and η cannot be fixed, but only the combination $\xi^\alpha - i(\eta^\alpha)^* \sim \xi^\alpha - i\eta^\alpha$; so, while a Majorana fermion can indeed always be written as the sum of a Dirac fermion + its charge conjugate, this decomposition is not unique; infinitely many different Dirac fermions can be used for this purpose.

A Majorana fermion can always be written as the sum of a left fermion \pm its charge conjugate, or the sum of a right fermion \pm its charge conjugate. Let us demonstrate the first case only, since the second goes exactly along the same lines.

$$\begin{aligned} \psi_M^\pm &= \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \pm(-i)\xi_\beta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pm(-i)\xi_\beta^* \end{pmatrix} = \psi_L \pm \gamma^2 \psi_L^* = \psi_L \pm (\psi_L)^c, \\ \psi_L &= \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi_D. \end{aligned} \quad (64)$$

We recall that Majorana fermions have CP parity $= \pm i$ (see subsection 3.3); they are *not* CP eigenstates (a γ^0 matrix comes into play in the definition of CP parity).

4 Invariance

4.1 Wightman's point of view [4]

The invariance of a “theory” is expressed by the invariance of the vacuum and the invariance of all n -point functions; \mathcal{O} is then a product of fields at different space-time points and ($\hat{\mathcal{O}}$ being the transformed of \mathcal{O})

$$|0\rangle = |\hat{0}\rangle, \langle 0|\mathcal{O}|0\rangle = \langle 0|\hat{\mathcal{O}}|0\rangle. \quad (65)$$

* in the case of a unitary transformation \mathcal{U} ,

$$\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle \stackrel{sym}{=} \langle 0|\mathcal{O}^U|0\rangle \stackrel{vacuum\ inv}{=} \langle 0^U|\mathcal{O}^U|0^U\rangle, \mathcal{O}^U = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{U}; \quad (66)$$

taking the example of parity and if $\mathcal{O} = \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\dots\phi_n(x_n)$, one has

$\mathcal{O}^P = P^{-1}\mathcal{O}P = \phi_1(t_1, -\vec{x}_1)\phi_2(t_2, -\vec{x}_2)\dots\phi_n(t_n, -\vec{x}_n)$, such that parity invariance writes

$$\langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\dots\phi_n(x_n)|0\rangle = \langle 0|\phi_1(t_1, -\vec{x}_1)\phi_2(t_2, -\vec{x}_2)\dots\phi_n(t_n, -\vec{x}_n)|0\rangle. \quad (67)$$

* in the case of a antiunitary transformation \mathcal{A} ,

$$\begin{aligned} \langle 0|\mathcal{O}|0\rangle &\stackrel{sym}{=} \langle 0|\mathcal{O}^A|0\rangle = \langle 0^A|\mathcal{O}^A|0^A\rangle; \\ \mathcal{O}^A &= (\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A})^\dagger \Rightarrow \\ \langle 0|\mathcal{O}|0\rangle &\stackrel{sym}{=} \langle 0|(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A})^\dagger|0\rangle = \langle 0|\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A}|0\rangle^*; \end{aligned} \quad (68)$$

taking the example of $\Theta = PCT$, with $\mathcal{O} = \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\dots\phi_n(x_n)$, one has

$$\mathcal{O}^\Theta = (\Theta^{-1}\mathcal{O}\Theta)^\dagger = (\Theta^{-1}\phi_n\Theta)^\dagger \dots (\Theta^{-1}\phi_2\Theta)^\dagger (\Theta^{-1}\phi_1\Theta)^\dagger = \phi_n^\Theta \dots \phi_2^\Theta \phi_1^\Theta.$$

For fermions [4]

$$\phi(x)^\Theta \equiv \pm \phi(-x) = (\Theta^{-1}\phi(x)\Theta)^\dagger, \quad (69)$$

such that PCT invariance expresses as (of course the sign is unique and must be precisely determined)

$$\begin{aligned} \langle 0|\phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\dots\phi_n(x_n)|0\rangle &\stackrel{sym}{=} \pm \langle 0|\phi_n(-x_n)\dots\phi_2(-x_2)\phi_1(-x_1)|0\rangle \\ &= \pm \langle 0|\phi_1^*(-x_1)\phi_2^*(-x_2)\dots\phi_n^*(-x_n)|0\rangle^* \\ &= \pm \langle 0|(\Theta^{-1}\phi_1(x_1)\Theta)(\Theta^{-1}\phi_2(x_2)\Theta)\dots(\Theta^{-1}\phi_n(x_n)\Theta)|0\rangle^*. \end{aligned} \quad (70)$$

It is enough to change $x_i \rightarrow -x_i$ and to read all Green functions from right to left instead of reading them from left to right (like Pauli).

For a general antiunitary transformation \mathcal{A} , the last line of (68) expressing the invariance also reads, since the vacuum is supposed to be invariant by \mathcal{A}^{-1} as well as by \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \langle 0|\mathcal{O}|0\rangle &\equiv \langle 0|\mathcal{O}0\rangle \\ &= \langle \mathcal{A}^{-1}0|(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A})^\dagger|\mathcal{A}^{-1}0\rangle = \langle \mathcal{A}^{-1}0|(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A})|\mathcal{A}^{-1}0\rangle^* = \langle \mathcal{A}^{-1}0|\mathcal{A}^{-1}(\mathcal{O}0)\rangle^*; \end{aligned} \quad (71)$$

requesting that, for any ϕ , $\langle \phi|\mathcal{O}|\phi\rangle = \langle \phi|(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{O}\mathcal{A})^\dagger|\phi\rangle$ would be much stronger a condition.

Wightman's expression of the invariance is weaker than requesting $\mathcal{O} = \hat{\mathcal{O}}$, since it occurs only for VEV's and not when sandwiched between any state ϕ .

4.2 The condition $\mathcal{O} = \hat{\mathcal{O}}$

It is often used to express the invariance of a theory with (Lagrangian or) Hamiltonian \mathcal{O} by the transformation under consideration.

* For unitary transformations, this condition is equivalent to

$$\mathcal{O} = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{O} \mathcal{U} \Leftrightarrow [\mathcal{U}, \mathcal{O}] = 0; \quad (72)$$

* For antiunitary transformations it yields (we use the property that, for unitary as well as for antiunitary operators $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^\dagger$ and $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^\dagger$, see footnote 5 and Appendix B)

$$\mathcal{O} = (\mathcal{A}^{-1} \mathcal{O} \mathcal{A})^\dagger = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{O}^\dagger \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A} \mathcal{O} = \mathcal{O}^\dagger \mathcal{A}. \quad (73)$$

Note that this is similar (apart from the exchange $\Theta \leftrightarrow \Theta^{-1}$) to the condition proposed in [14] (p.322) as the “CPT” theorem for any Lagrangian density $\mathcal{L}(x)$ considered as a hermitian *operator*

$$\Theta \mathcal{L}(x) \Theta^{-1} = \mathcal{L}^\dagger(-x). \quad (74)$$

So, that the Hamiltonian commutes with the symmetry transformation can eventually be accepted when this transformation is unitary (and we have already mentioned that this statement is stronger than Wightman’s expression for invariance); however, when the transformation is antiunitary, one must be more careful.

Requesting that the transformed states should satisfy the same equations as the original ones is only true for unitary transformations. It is not in the case of antiunitary operations like T (or PCT) since a time reversed fermion does not satisfy the same equation as the original fermion but the time-reversed equation.

4.3 Hamiltonian. Lagrangian.

4.3.1 The case of a unitary transformation

• Invariance of the Hamiltonian

In Quantum Mechanics, a system is said to be invariant by a unitary transformation \mathcal{U} if the transformed of the eigenstates of the Hamiltonian H have the same energies as the original states

$$H\psi = E\psi \text{ and } H\mathcal{U}\psi = E\mathcal{U}\psi; \quad (75)$$

since \mathcal{U} is unitary, it is in particular linear, such that $E\mathcal{U}\psi = \mathcal{U}.E\psi = \mathcal{U}.H\psi$; this is why the invariance of the theory is commonly expressed by

$$H = \mathcal{U}^{-1} H \mathcal{U} \Leftrightarrow [\mathcal{U}, H] = 0. \quad (76)$$

Defining, according to Wightman, the transformed \hat{H} of the Hamiltonian H by $\hat{H} = \mathcal{U}^{-1} H \mathcal{U}$, we see the the invariance condition (76) also rewrites $\hat{H} = H$. No special condition of reality is required for E .

• Invariance of the Lagrangian

The Lagrangian approach is often more convenient in Quantum Field Theory; it determines the (classical) equations of motion, and also the perturbative expansion.

The Lagrangian density $\mathcal{L}(x)$ is written $\langle \Psi(x) | L(x) | \Psi(x) \rangle$, where L is an operator and $\Psi(x)$ is a “vector” of different fields.

A reasonable definition for the invariance of the theory is that the transformed $\mathcal{U}\Psi$ of Ψ satisfies the same equation as Ψ ; since $\mathcal{L}(x)$ and $e^{i\alpha}\mathcal{L}(x)$ will provide the same (classical) dynamics, one expresses this invariance by

$$\langle \mathcal{U}.\Psi(x) | L(x) | \mathcal{U}.\Psi(x) \rangle = e^{i\alpha} \langle \Psi(x) | L(x) | \Psi(x) \rangle = e^{i\alpha} \mathcal{L}(x). \quad (77)$$

Due to the unitarity of \mathcal{U} , this is equivalent to $\langle \Psi(x) | \mathcal{U}^{-1} L(x) \mathcal{U} | \Psi(x) \rangle = e^{i\alpha} \langle \Psi(x) | L(x) | \Psi(x) \rangle$ or, owing to the fact that Ψ can be anything,

$$L\mathcal{U} = e^{i\alpha}\mathcal{U}L. \quad (78)$$

If one applies this rule to a mass term, and consider the mass (scalar) as an operator, the unitarity of \mathcal{U} entails that a scalar as well as the associated operator should stay unchanged. This leaves only the possibility $\alpha = 0$. The condition (78) reduces accordingly to the vanishing of the commutator $[L, \mathcal{U}]$. Wightman's definition (6) of the transformed $\hat{L} = \mathcal{U}^{-1} L \mathcal{U}$ of the operator L makes this condition equivalent to $\hat{L} = L$. No condition of reality (hermiticity) is required on L .

4.3.2 The case of antiunitary transformations

The situation is more tricky, since, in particular, the states transformed by a antiunitary transformation (for example T) do not satisfy the same classical equations as the original states (in the case of T , they satisfy the time-reversed equations).

This why it is more convenient to work with each bilinear present in the Lagrangian or Hamiltonian, which we write for example $\langle \phi | \mathcal{O} | \chi \rangle$. ϕ, ξ can be fermions or bosons, \mathcal{O} a scalar, a derivative operator Taking the example of PCT , this bilinear transforms into $\langle \Theta\phi | \mathcal{O} | \Theta\chi \rangle \stackrel{(12)}{=} \langle \chi | \hat{\mathcal{O}} | \phi \rangle = \langle \chi | (\Theta^{-1}\mathcal{O}\Theta)^\dagger | \phi \rangle$.

Application: Dirac and Majorana mass terms

• Problems with a classical fermionic Lagrangian

In view of all possible terms compatible with Lorentz invariance, we work in a basis which can accommodate, for example, both a Dirac fermion and its antiparticle. Accordingly, For a single Dirac fermion (and its antiparticle), we introduce the 4-vector of Weyl fermions

$$\psi = \begin{pmatrix} n_L \\ n_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ (\xi^\beta)^c \\ (\eta_{\dot{\gamma}})^c \\ \eta_{\dot{\delta}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ -i(\eta^{\dot{\beta}})^* \\ -i(\xi_{\dot{\gamma}})^* \\ \eta_{\dot{\delta}} \end{pmatrix} \stackrel{\text{Lorentz}}{\sim} \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta^\beta \\ \xi_{\dot{\gamma}} \\ \eta_{\dot{\delta}} \end{pmatrix}, \quad (79)$$

where $\stackrel{\text{Lorentz}}{\sim}$ means “transforms like (by Lorentz)”

Let us study the transform by PCT of a Dirac-type mass term $m_D \xi^{\alpha*}(x) \eta_{\dot{\alpha}}(x) = \langle \xi^\alpha(x) | m_D | \eta_{\dot{\alpha}}(x) \rangle$ and of a Majorana-type mass term $m_M \xi^{\alpha*}(x) (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) = \langle \xi^\alpha(x) | m_M | (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) \rangle$.

* m_D and m_M we first consider as operators sandwiched between fermionic grassmanian functions. The two mass terms transform respectively into $\langle \Theta \xi^\alpha(x) | m_D | \Theta \eta_{\dot{\alpha}}(x) \rangle$ and $\langle \Theta \xi^\alpha(x) | m_M | \Theta (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) \rangle$. We now use (12), which transforms these two expressions into $\langle \eta_{\dot{\alpha}} | m_D^\Theta | \xi^\alpha \rangle$ and $\langle (\eta_{\dot{\alpha}})^c | m_M^\Theta | \xi^\alpha \rangle$. Since Θ is antilinear, $\Theta^{-1} m \Theta = m^* \Rightarrow m^\Theta \equiv (\Theta^{-1} m \Theta)^\dagger = m$. So the two mass terms transform respectively into $m_D \langle \eta_{\dot{\alpha}} | \xi^\alpha \rangle \equiv m_D \eta_{\dot{\alpha}}^* \xi^\alpha$ and $m_M \langle \eta_{\dot{\alpha}}^c | \xi^\alpha \rangle \equiv m_M (\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* \xi^\alpha$. Notice that $\eta_{\dot{\alpha}}^* \xi^\alpha$ is (using anticommutation) $(-)$ the complex conjugate of $\xi^{\alpha*} \eta_{\dot{\alpha}}$ and like wise, that $(\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* \xi^\alpha$ is $(-)$ the complex conjugate of $\xi^{\alpha*} \eta_{\dot{\alpha}}^c$.

The Lagrangian density also a priori involves Dirac and Majorana mass terms $\mu_D \eta_{\dot{\alpha}}^* \xi^\alpha$ and $\mu_M (\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* \xi^\alpha$, such that PCT invariance requires $m_D = \mu_D$ and $m_M = \mu_M$ ¹⁷.

¹⁷If the Lagrangian (Hamiltonian) is furthermore real, it should match its complex conjugate (see Appendix C). The c.c. of the Dirac mass terms are $m_D^* \xi^\alpha \eta_{\dot{\alpha}}^* + \mu_D^* \eta_{\dot{\alpha}}^* \xi^\alpha \stackrel{\text{anticom}}{=} -m_D^* \eta_{\dot{\alpha}}^* \xi^\alpha - \mu_D^* \xi^\alpha \eta_{\dot{\alpha}}^*$ and the c.c. of the Majorana mass term are $m_M^* \xi^\alpha (\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* + \mu_M^* (\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* \xi^\alpha \stackrel{\text{anticom}}{=} -m_M^* (\eta_{\dot{\alpha}}^c)^* \xi^\alpha - \mu_M^* \xi^\alpha (\eta_{\dot{\alpha}}^c)^*$. Using (29) to replace $\eta_{\dot{\alpha}}^c$ by $(-i)\xi_\alpha^*$, the reality of the Lagrangian is seen to require $m_D = -\mu_D^*$ and $m_M = -\mu_M^*$.

So, combining the two, we see that a real and PCT invariant (classical) Lagrangian should satisfy $m_D = \mu_D$ imaginary and $m_M = \mu_M$ imaginary.

* If we instead consider that $m\phi^*\chi \xrightarrow{PCT} m(\Theta\phi^*)\Theta\chi$ we obtain, using (48)(52), that the Dirac mass term transforms into $m_d(-i\xi^{\alpha*})(-i\eta_{\dot{\alpha}})$, that is, it changes sign by PCT . The Majorana mass term transforms into $m_M(-i\xi^{\alpha*})\Theta(-i\xi_{\alpha}^*) \stackrel{antilin}{=} m_M(-i\xi^{\alpha*})(+i)\Theta\xi_{\alpha}^* = (-i\xi_{\alpha}^*)(+i)(-i\xi_{\alpha}^*) = -i\xi^{\alpha*}\xi_{\alpha}^*$, that is, unlike the Dirac mass term, the Majorana mass term does not change sign. This alternative would in particular exclude the simultaneous presence of Dirac and Majorana mass terms (necessary for the see-saw mechanism).

* Conclusion: antiunitary transformations of a classical fermionic Lagrangian are ambiguous and can lead to contradictory statements. Defining a classical fermionic Lagrangian is most probably itself problematic¹⁸.

• Quantum (operator) Lagrangian

Dirac and Majorana mass terms write respectively $[\xi^{\alpha}]^{\dagger}[m_D][\eta_{\dot{\alpha}}]$ and $[\xi^{\alpha}]^{\dagger}[m_M][\eta_{\dot{\alpha}}^c] \stackrel{(32)}{=} [\xi^{\alpha}]^{\dagger}[m_M](-i)[\xi_{\alpha}]^{\dagger}$. Using (8), one gets $([\xi^{\alpha}]^{\dagger}[m_D][\eta_{\dot{\alpha}}])^{\Theta} = [\eta_{\dot{\alpha}}]^{\Theta}[m_D]^{\Theta}([\xi^{\alpha}]^{\dagger})^{\Theta} = [\eta_{\dot{\alpha}}]^{\Theta}[m_D]^{\Theta}([\xi^{\alpha}]^{\Theta})^{\dagger} = -i[\eta_{\dot{\alpha}}][m_D](-i)[\xi^{\alpha}]^{\dagger}$, such that, using the anticommutation of fermionic operators, the Dirac mass term transforms by Θ into itself.

As far as the Majorana mass term is concerned, it transforms into $([\xi^{\alpha}]^{\dagger}[m_M][\eta_{\dot{\alpha}}^c])^{\Theta} = ([\eta_{\dot{\alpha}}^c])^{\Theta}[m_M]^{\Theta}([\xi^{\alpha}]^{\dagger})^{\Theta} = (-i[\xi_{\alpha}]^{\dagger})^{\Theta}[m_M]^{\Theta}([\xi^{\alpha}]^{\dagger})^{\Theta}$. One uses again (8) to evaluate $(-i[\xi_{\alpha}]^{\dagger})^{\Theta} = ([\xi_{\alpha}]^{\dagger})^{\Theta}(-i)^{\Theta} = (-i)[\xi_{\alpha}]^{\dagger}(-i) = -[\xi_{\alpha}]^{\dagger}$. So, finally, the Majorana mass term transforms into $-[\xi_{\alpha}]^{\dagger}m_M(-i)[\xi^{\alpha}]^{\dagger} \stackrel{anticom}{=} -i[\xi^{\alpha}]^{\dagger}m_M[\xi_{\alpha}]^{\dagger}$, that is, like the Dirac mass term, into itself.

The same conclusions are obtained in the propagator formalism.

5 The fermionic propagator and discrete symmetries (1 flavor)

The fermionic propagator $\Delta(x)$ is a matrix with a Lorentz tensorial structure, the matrix elements of which are the vacuum expectation values of \mathcal{T} -products of two fermionic operators:

$$\mathcal{T}\psi(x)\chi(y) = \theta(x^0 - y^0)\psi(x)\chi(y) - \theta(y^0 - x^0)\chi(y)\psi(x); \quad (80)$$

the Lorentz indices of the two operators yield the tensorial structure of the matrix elements.

If, for example, one works in the fermionic basis $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$, and if $\alpha, \beta \dots$ denote their Lorentz indices, the propagator is a 4×4 matrix $\Delta(x)$ such that

$$\Delta_{ij}^{\alpha\beta}(x) = \langle \psi_i^{\alpha} | \Delta(x) | \psi_j^{\beta} \rangle = \langle 0 | \mathcal{T}(\psi_i)^{\alpha}(\frac{x}{2})(\psi_j^{\dagger})^{\beta}(-\frac{x}{2}) | 0 \rangle. \quad (81)$$

Supposing

$$\langle \psi_i^{\alpha} | \psi_j^{\beta} \rangle = \delta_{ij}\delta^{\alpha\beta}, \quad (82)$$

we shall also use the notation,

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \sum_{i,j} | \psi_i^{\alpha} \rangle \Delta_{ij}^{\alpha\beta}(x) \langle \psi_j^{\beta} | \\ &= \left(\begin{array}{cccc} | \psi_1^{\alpha} \rangle & | \psi_2^{\alpha} \rangle & | \psi_3^{\alpha} \rangle & | \psi_4^{\alpha} \rangle \end{array} \right) \Delta_{ij}^{\alpha\beta}(x) \left(\begin{array}{c} \langle \psi_1^{\beta} | \\ \langle \psi_2^{\beta} | \\ \langle \psi_3^{\beta} | \\ \langle \psi_4^{\beta} | \end{array} \right); \end{aligned} \quad (83)$$

since one indeed finds $\langle \psi_i^{\alpha} | \Delta(x) | \psi_j^{\beta} \rangle = \Delta_{ij}^{\alpha\beta}(x)$.

¹⁸Let us also mention the arbitrariness that results from adding to a mass matrix any vanishing anticommutator.

In the basis (79) in which we are working, the fermionic propagator is a 4×4 matrix which involves the following types of \mathcal{T} products:

* mass-like propagators:

$$\begin{aligned} &< 0 | \mathcal{T} \xi^\alpha(x) (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 > \text{ and } < 0 | \mathcal{T} (\xi^\alpha)^c(x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x) | 0 > \text{ (Dirac-like),} \\ &< 0 | \mathcal{T} (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) ((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x) | 0 > \text{ and } < 0 | \mathcal{T} \eta_{\dot{\alpha}}(x) (\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 > \text{ (Dirac-like),} \\ &< 0 | \mathcal{T} \xi^\alpha(x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x) | 0 >, < 0 | \mathcal{T} (\xi^\alpha)^c(x) (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 > \text{ (Majorana-like),} \\ &< 0 | \mathcal{T} (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) (\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 >, < 0 | \mathcal{T} \eta_{\dot{\alpha}}(x) ((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x) | 0 > \text{ (Majorana-like);} \end{aligned}$$

* kinetic-like propagators:

$$\begin{aligned} &< 0 | \mathcal{T} \xi^\alpha(x) (\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 > \text{ and } < 0 | \mathcal{T} (\xi^\alpha)^c(x) ((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x) | 0 > \text{ (diagonal),} \\ &< 0 | \mathcal{T} (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x) | 0 > \text{ and } < 0 | \mathcal{T} \eta_{\dot{\alpha}}(x) (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 > \text{ (diagonal),} \\ &< 0 | \mathcal{T} \xi^\alpha(x) ((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x) | 0 > \text{ and } < 0 | \mathcal{T} (\xi^\alpha)^c(x) (\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 > \text{ (non-diagonal),} \\ &< 0 | \mathcal{T} (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 > \text{ and } < 0 | \mathcal{T} \eta_{\dot{\alpha}}(x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x) | 0 > \text{ (non-diagonal).} \end{aligned}$$

Any propagator is a non-local functional of two fields, which are evaluated at two different space-time points; a consequence is that, unlike for the Lagrangian, which is a local functional of the fields, one cannot implement constraints coming from the anticommutation of fermions. Likewise, a propagator has no hermiticity (or reality) property, and no corresponding constraint exist¹⁹. So, the only constraints that can be cast on the propagator come from discrete symmetries and their combinations: C , CP , PCT . The mass eigenstates, which are determined from the propagator are accordingly expected to be less constrained than the eigenstates of any quadratic Lagrangian²⁰.

5.1 PCT constraints

All demonstrations proceed along the following steps.

Suppose that we want to deduce PCT constraints for $< 0 | \mathcal{T} \psi(x) \chi^\dagger(-x) | 0 >$. The information that we have from (54) is: there exist ϕ and ω such that $\psi(x) = \Theta \phi^\dagger(-x) \Theta^{-1}$, $\chi^\dagger(-x) = \Theta \omega(x) \Theta^{-1}$ ²¹, the vacuum is supposed to be invariant $| 0 > = | \Theta 0 >$, and Θ is antiunitary, which entails (10)²². We have accordingly

$$\begin{aligned} &< 0 | \mathcal{T} \psi(x) \chi^\dagger(-x) | 0 > = < 0 | \mathcal{T} \Theta \phi^\dagger(-x) \Theta^{-1} \Theta \omega(x) \Theta^{-1} | 0 > \\ &\stackrel{\text{invariance of the vacuum}}{=} < \Theta 0 | \mathcal{T} \Theta \phi^\dagger(-x) \Theta^{-1} \Theta \omega(x) \Theta^{-1} | \Theta 0 > = < \Theta 0 | \mathcal{T} \Theta \phi^\dagger(-x) \omega(x) \Theta^{-1} | \Theta 0 > \\ &\stackrel{(10)}{=} < 0 | \theta(t) \omega^\dagger(x) \phi(-x) - \theta(-t) \phi(-x) \omega^\dagger(x) | 0 > = - < 0 | \mathcal{T} \phi(-x) \omega^\dagger(x) | 0 >. \end{aligned}$$

5.1.1 Constraints on mass-like terms

$$\begin{aligned} * \text{Majorana-like } < 0 | \mathcal{T} \xi^\alpha(x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x) | 0 > &= < 0 | \mathcal{T} \xi^\alpha(-x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(x) | 0 > \\ &= - < 0 | \mathcal{T} ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(x) \xi^\alpha(-x) | 0 >; \\ * \text{Majorana-like } < 0 | \mathcal{T} (\eta_{\dot{\alpha}})^c(x) (\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 > &= < 0 | \mathcal{T} (\eta_{\dot{\alpha}})^c(-x) (\xi^\beta)^\dagger(x) | 0 > \\ &= - < 0 | \mathcal{T} (\xi^\beta)^\dagger(x) (\eta_{\dot{\alpha}})^c(-x) | 0 >; \\ * \text{Majorana-like } < 0 | \mathcal{T} (\xi^\alpha)^c(x) (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 > &= < 0 | \mathcal{T} (\xi^\alpha)^c(-x) (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(x) | 0 > \\ &= - < 0 | \mathcal{T} (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(x) (\xi^\alpha)^c(-x) | 0 >; \\ * \text{Majorana-like } < 0 | \mathcal{T} \eta_{\dot{\alpha}}(x) ((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x) | 0 > &= < 0 | \mathcal{T} \eta_{\dot{\alpha}}(-x) ((\xi^\beta)^c)^\dagger(x) | 0 > \\ &= - < 0 | \mathcal{T} ((\xi^\beta)^c)^\dagger(x) \eta_{\dot{\alpha}}(-x) | 0 >; \end{aligned}$$

¹⁹Only the spectral function has positivity properties.

²⁰And the ones of any mass matrix, which can only be eventually introduced in a linear approximation to the inverse propagator in the vicinity of one of its poles [2].

²¹For example, from (54), one gets $\xi^\alpha = \Theta(-i(\xi^\alpha)^\dagger) \Theta^{-1}$.

²² Θ , though antiunitary, does not act on the θ functions of the \mathcal{T} -product because they are real.

$$\begin{aligned}
 * \text{Dirac-like } <0|\mathcal{T}\xi^\alpha(x)(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x)|0> &= <0|\mathcal{T}\xi^\alpha(-x)(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(x)|0> \\
 &= -<0|\mathcal{T}(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(x)\xi^\alpha(-x)|0>; \\
 * \text{Dirac-like } <0|\mathcal{T}\eta_{\dot{\alpha}}(x)(\xi^\beta)^\dagger(-x)|0> &= <0|\mathcal{T}\eta_{\dot{\alpha}}(-x)(\xi^\beta)^\dagger(x)|0> \\
 &= -<0|\mathcal{T}(\xi^\beta)^\dagger(x)\eta_{\dot{\alpha}}(-x)|0>; \\
 * \text{Dirac-like } <0|\mathcal{T}(\xi^\alpha)^c(x)((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x)|0> &= <0|\mathcal{T}(\xi^\alpha)^c(-x)((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(x)|0> \\
 &= -<0|\mathcal{T}((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(x)(\xi^\alpha)^c(-x)|0>; \\
 * \text{Dirac-like } <0|\mathcal{T}(\eta_{\dot{\alpha}})^c(x)((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x)|0> &= <0|\mathcal{T}(\eta_{\dot{\alpha}})^c(-x)((\xi^\beta)^c)^\dagger(x)|0> \\
 &= -<0|\mathcal{T}((\xi^\beta)^c)^\dagger(x)(\eta_{\dot{\alpha}})^c(-x)|0>.
 \end{aligned} \tag{84}$$

We give the demonstration of the first (Majorana-like) line of (84).

$$\begin{aligned}
 <0|\mathcal{T}\xi^\alpha(x)((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x)|0> &= <0|\mathcal{T}\xi^\alpha(x)i\xi_\beta(-x)|0> = i<0|\mathcal{T}\xi^\alpha(x)\xi_\beta(-x)|0> \\
 &= i<0|\mathcal{T}\Theta(-i(\xi^\alpha)^\dagger(-x))\Theta^{-1}\Theta(-i(\xi_\beta)^\dagger(x))\Theta^{-1}|0> \\
 &\stackrel{\text{invariance of the vacuum}}{=} i<\Theta 0|\mathcal{T}\Theta(-i(\xi^\alpha)^\dagger(-x))\Theta^{-1}\Theta(-i(\xi_\beta)^\dagger(x))\Theta^{-1}|\Theta 0> \\
 &= i<\Theta 0|\mathcal{T}\Theta(-i(\xi^\alpha)^\dagger(-x))(-i(\xi_\beta)^\dagger(x))\Theta^{-1}|\Theta 0> \\
 &= -i<\Theta 0|\mathcal{T}\Theta(\xi^\alpha)^\dagger(-x)(\xi_\beta)^\dagger(x)\Theta^{-1}|\Theta 0> \\
 &\stackrel{\text{antiunitarity(10)}}{=} -i<0|\theta(t)\xi_\beta(x)(\xi^\alpha)(-x)|0> + i<0|\theta(-t)\xi^\alpha(-x)\xi_\beta(x)|0> \\
 &= +i<0|\mathcal{T}\xi^\alpha(-x)\xi_\beta(x)|0> = <0|\mathcal{T}\xi^\alpha(-x)((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(x)|0>.
 \end{aligned}$$

All these propagators are accordingly left invariant²³ by the 4-inversion $x \rightarrow -x$, or, in Fourier space, they are invariant when $p_\mu \rightarrow -p_\mu$.

5.1.2 Constraints on kinetic-like terms

$$\begin{aligned}
 * \text{Diagonal } <0|\mathcal{T}\xi^\alpha(x)(\xi^\beta)^\dagger(-x)|0> &= -<0|\mathcal{T}\xi^\alpha(-x)(\xi^\beta)^\dagger(x)|0> \\
 &= <0|\mathcal{T}(\xi^\beta)^\dagger(x)\xi^\alpha(-x)|0>; \\
 * \text{Diagonal } <0|\mathcal{T}(\xi^\alpha)^c(x)((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x)|0> &= -<0|\mathcal{T}(\xi^\alpha)^c(-x)((\xi^\beta)^c)^\dagger(x)|0> \\
 &= <0|\mathcal{T}(\xi^\beta)^c)^\dagger(x)(\xi^\alpha)^c(-x)|0>; \\
 * \text{Diagonal } <0|\mathcal{T}(\eta_{\dot{\alpha}})^c(x)((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(-x)|0> &= -<0|\mathcal{T}(\eta_{\dot{\alpha}})^c(-x)((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(x)|0> \\
 &= <0|\mathcal{T}((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(x)(\eta_{\dot{\alpha}})^c(-x)|0>; \\
 * \text{Diagonal } <0|\mathcal{T}\eta_{\dot{\alpha}}(x)(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x)|0> &= -<0|\mathcal{T}\eta_{\dot{\alpha}}(-x)(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(x)|0> \\
 &= <0|\mathcal{T}(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(x)\eta_{\dot{\alpha}}(-x)|0>; \\
 * \text{Non-diagonal } <0|\mathcal{T}\xi^\alpha(x)((\xi^\beta)^c)^\dagger(-x)|0> &= -<0|\mathcal{T}\xi^\alpha(-x)((\xi^\beta)^c)^\dagger(x)|0> \\
 &= <0|\mathcal{T}((\xi^\beta)^c)^\dagger(x)\xi^\alpha(-x)|0>; \\
 * \text{Non-diagonal } <0|\mathcal{T}(\xi^\alpha)^c(x)(\xi^\beta)^\dagger(-x)|0> &= -<0|\mathcal{T}(\xi^\alpha)^c(-x)(\xi^\beta)^\dagger(x)|0> \\
 &= <0|\mathcal{T}(\xi^\beta)^\dagger(x)(\xi^\alpha)^c(-x)|0>; \\
 * \text{Non-diagonal } <0|\mathcal{T}(\eta_{\dot{\alpha}})^c(x)(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x)|0> &= -<0|\mathcal{T}(\eta_{\dot{\alpha}})^c(-x)(\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(x)|0>
 \end{aligned}$$

²³This is not much information, but it is correct. Consider indeed the usual Feynman propagator in Fourier space for a Dirac fermion with mass m

$$\int d^4x e^{ipx} <0|\mathcal{T}\begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}(x)\begin{pmatrix} (\xi^\beta)^\dagger & (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger \end{pmatrix}(-x)\gamma^0|0> = \frac{p_\mu\gamma^\mu + m}{p^2 - m^2} = \frac{1}{p^2 - m^2} \begin{pmatrix} m & p_\mu\bar{\sigma}^\mu \\ p_\mu\sigma^\mu & m \end{pmatrix}; \tag{85}$$

it yields in particular (the γ^0 in (85) makes $\gamma_{\alpha,\beta}^\mu$ appear)

$$\int d^4x e^{ipx} <0|\mathcal{T}\xi^\alpha(x)\eta_{\dot{\beta}}(-x)|0> = \frac{p_\mu\gamma_{\alpha\beta}^\mu + m\delta_{\alpha\beta}}{p^2 - m^2}, \alpha, \beta = 1, 2. \tag{86}$$

PCT invariance tells us that, in a Dirac mass-like propagator, the p^μ term is not present, and the remaining term is diagonal in α, β ; and, indeed, $\gamma_{\alpha\beta}^\mu$ vanishes $\forall \alpha, \beta = 1, 2$, while the term proportional to m is diagonal in α, β .

$$\begin{aligned}
& = \langle 0 | \mathcal{T}(\eta_{\dot{\beta}})^{\dagger}(x)(\eta_{\dot{\alpha}})^c(-x) | 0 \rangle; \\
* \text{ Non-diagonal } & \langle 0 | \mathcal{T}\eta_{\dot{\alpha}}(x)((\eta_{\dot{\beta}})^c)^{\dagger}(-x) | 0 \rangle = - \langle 0 | \mathcal{T}\eta_{\dot{\alpha}}(-x)((\eta_{\dot{\beta}})^c)^{\dagger}(x) | 0 \rangle \\
& = \langle 0 | \mathcal{T}((\eta_{\dot{\beta}})^c)^{\dagger}(x)\eta_{\dot{\alpha}}(-x) | 0 \rangle.
\end{aligned} \tag{87}$$

In Fourier space, all these propagators must accordingly be odd in p_{μ} . We check like above on the Dirac propagator that it is indeed the case. One gets for example (the γ^0 in (85) now makes $\gamma_{\alpha,\beta+2}^{\mu}$ appear)

$$\int d^4x e^{ipx} \langle 0 | \mathcal{T}\xi^{\alpha}(x)(\xi^{\beta})^{\dagger}(-x) | 0 \rangle = \frac{p_{\mu}\gamma_{\alpha\beta+2}^{\mu} + m\delta_{\alpha\beta+2}}{p^2 - m^2}, \alpha, \beta = 1, 2, \tag{88}$$

in which only the terms linear in p_{μ} are present, which are indeed odd in p_{μ} as predicted by *PCT* invariance.

Note that *PCT* invariance does not forbid non-diagonal kinetic-like propagators.

5.1.3 Simple assumptions and consequences

PCT symmetry constrains, in Fourier space, all mass-like propagators to be p -even and all kinetic-like propagators to be p -odd; the former can only write $f(p^2)\delta_{\alpha\beta}$ and the latter $g(p^2)p_{\mu}\sigma_{\alpha\beta}^{\mu}$ or $h(p^2)p_{\mu}\overline{\sigma}_{\alpha\beta}^{\mu}$. This is what we will suppose hereafter, and consider, in Fourier space, a propagator

$$\Delta(p) = \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha_1(p^2) & a_1(p^2) \\ b_1(p^2) & \beta_1(p^2) \end{array} \right) p_{\mu}\overline{\sigma}_{\alpha\beta}^{\mu} & \left(\begin{array}{cc} m_{L1}(p^2) & \mu_1(p^2) \\ m_1(p^2) & m_{R1}(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \left(\begin{array}{cc} m_{L2}(p^2) & m_2(p^2) \\ \mu_2(p^2) & m_{R2}(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \beta_2(p^2) & b_2(p^2) \\ a_2(p^2) & \alpha_2(p^2) \end{array} \right) p_{\mu}\sigma_{\alpha\beta}^{\mu} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \langle \xi^{\beta} | \\ \langle (\xi^{\beta})^c | \\ \langle (\eta_{\dot{\beta}})^c | \\ \langle \eta_{\dot{\beta}} | \end{array} \right). \tag{89}$$

This ansatz enables to get explicit constraints on the propagator. It is motivated by the fact that, classically, the (quadratic) Lagrangian, which is the inverse propagator, has this same Lorentz structure

$$L = \left(\begin{array}{c|c} K_1(p_-)_{\alpha\beta} & M_1 \delta_{\alpha\beta} \\ \hline M_2 \delta_{\alpha\beta} & K_2(p_+)_{\alpha\beta} \end{array} \right). \tag{90}$$

An important property is that it automatically satisfies the *PCT* constraints (84) (87). For mass-like propagators, which are invariant by the 4-inversion $x \rightarrow -x$ it is a triviality; for kinetic like propagators, the “ $-$ ” signs which occur in the r.h.s.’s of (87) are canceled by the one which comes from the differential operator p_{μ} acting on $(-x)$ instead of x . We consider accordingly that (89) expresses the invariance of the propagator by *PCT*.

From now onwards we shall always use the form (89) for the propagator, considering therefore that it is *PCT* invariant. It includes sixteen complex parameters. We will see how individual discrete symmetries and their products reduce this number.

5.2 Charge conjugate fields

By using the definitions of charge conjugate fields

$$\begin{aligned}
\xi^{\alpha} &= g^{\alpha\gamma}\xi_{\gamma} = -i\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^2\xi_{\dot{\gamma}} = -i\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^2(-i)((\eta_{\dot{\gamma}})^c)^{\dagger} = -\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^2((\eta_{\dot{\gamma}})^c)^{\dagger}, \\
\eta_{\dot{\beta}} &= g_{\beta\delta}\eta^{\dot{\delta}} = i\sigma_{\beta\dot{\delta}}^2\eta^{\dot{\delta}} = i\sigma_{\beta\dot{\delta}}^2(-i)((\xi^{\dot{\delta}})^c)^{\dagger} = \sigma_{\beta\dot{\delta}}^2((\xi^{\dot{\delta}})^c)^{\dagger}.
\end{aligned} \tag{91}$$

one can bring additional constraints to the ones obtained from expressing the invariance by a discrete symmetry like *PCT*. We first give the example of a Dirac-like propagator:

$$\begin{aligned} < 0 | \mathcal{T} \xi^\alpha(x) (\eta_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 > = < 0 | \mathcal{T}(-) \sigma_{\alpha\gamma}^2 ((\eta_{\dot{\gamma}})^c)^\dagger(x) \left(\sigma_{\beta\delta}^2 ((\xi^\delta)^c)^\dagger(-x) \right)^\dagger | 0 > \\ &= \sigma_{\alpha\gamma}^2 \sigma_{\beta\delta}^2 < 0 | \mathcal{T}((\eta_{\dot{\gamma}})^c)^\dagger(x) (\xi^\delta)^c(-x) | 0 > = (\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma}) < 0 | \mathcal{T}((\eta_{\dot{\gamma}})^c)^\dagger(x) (\xi^\delta)^c(-x) | 0 > = \\ &= - < 0 | \mathcal{T}(\xi^\alpha)^c(-x) ((\eta_{\dot{\beta}})^c)^\dagger(x) | 0 > + \delta_{\alpha\beta} < 0 | \mathcal{T}(\xi^\gamma)^c(-x) ((\eta_{\dot{\gamma}})^c)^\dagger(x) | 0 >. \end{aligned}$$

The r.h.s. of the corresponding *PCT* constraint in the first line of (84) writes the same but for the exchange $x \rightarrow (-x)$. If we now use the ansatz (89) which implements *PCT* invariance, one gets

$$\mu_1(p^2) \delta_{\alpha\beta} = -(\delta_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma}) m_1(p^2) \delta_{\delta\gamma} = \delta_{\alpha\beta} m_1(p^2), \quad (92)$$

equivalently

$$m_1(p^2) = \mu_1(p^2). \quad (93)$$

Likewise, one gets $m_2(p^2) = \mu_2(p^2)$.

For Majorana-like propagator, using the definitions (91) of charge conjugate fields, one gets

$$\begin{aligned} < 0 | \mathcal{T} \xi^\alpha(x) (\eta_{\dot{\beta}}^c)^\dagger(-x) | 0 > &= < 0 | \mathcal{T}(\eta_{\dot{\beta}}^c)^\dagger(x) \xi^\alpha(-x) | 0 > - \delta_{\alpha\beta} < 0 | \mathcal{T}(\eta_{\dot{\gamma}}^c)^\dagger(x) \xi^\gamma(-x) | 0 > \\ &= - < 0 | \mathcal{T} \xi^\alpha(-x) (\eta_{\dot{\beta}}^c)^\dagger(x) | 0 > + \delta_{\alpha\beta} < 0 | \mathcal{T} \xi^\gamma(-x) (\eta_{\dot{\gamma}}^c)^\dagger(x) | 0 >, \end{aligned} \quad (94)$$

while, with the same procedure, its transformed by *PCT* in the r.h.s. of (84) becomes

$$- < 0 | \mathcal{T}(\eta_{\dot{\beta}}^c)^\dagger(x) \xi^\alpha(-x) | 0 > = - < 0 | \mathcal{T} \xi^\alpha(x) (\eta_{\dot{\beta}}^c)^\dagger(-x) + \delta_{\alpha\beta} < 0 | \mathcal{T} \xi^\gamma(x) (\eta_{\dot{\gamma}}^c)^\dagger(-x) | 0 >. \quad (95)$$

One only gets tautologies such that no additional constraint arises.

We implement the same procedure for kinetic-like terms, for example $< 0 | \mathcal{T} \xi^\alpha(x) (\xi^\beta)^\dagger(-x) | 0 > = < 0 | \mathcal{T}(\xi^\beta)^\dagger(x) \xi^\alpha(-x) | 0 >$. Using $\xi^\alpha = -\sigma_{\alpha\gamma}^2 ((\eta_{\dot{\gamma}})^c)^\dagger$ and $(\xi^\beta)^\dagger = \sigma_{\beta\delta}^2 (\eta_{\dot{\delta}})^c$ and (89), one gets

$$\begin{aligned} \alpha_1(p^2) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta} &= -(\delta_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma}) \beta_2(p^2) p_\mu \sigma^\mu_{\delta\gamma} \\ &= -\beta_2(p^2) (p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} p_\mu \text{Tr} \sigma_\mu) \\ &= -\beta_2(p^2) (p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} (2p_0 + 0 \times p^i)) \\ &= -\beta_2(p^2) (-p_0 \sigma_{\alpha\beta}^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}_{\alpha\beta}) \\ &= \beta_2(p^2) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (96)$$

which entails

$$\alpha_1(p^2) = \beta_2(p^2). \quad (97)$$

Likewise, one gets $\alpha_2(p^2) = \beta_1(p^2)$, and, for the non-diagonal kinetic-like propagators, $a_1(p^2) = a_2(p^2)$, $b_1(p^2) = b_2(p^2)$.

So, after making use of the definition of charge conjugate fields, (89) expressing the *PCT* invariance of the propagator rewrites

$$\Delta_{PCT}(p) = \left(\begin{array}{c} | \xi^\alpha > \quad | (\xi^\alpha)^c > \quad | (\eta_{\dot{\alpha}})^c > \quad | \eta_{\dot{\alpha}} > \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & u(p^2) \\ v(p^2) & \beta(p^2) \end{array} \right) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta} \\ \left(\begin{array}{cc} m_{L2}(p^2) & \mu_2(p^2) \\ \mu_2(p^2) & m_{R2}(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \end{array} \middle| \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} m_{L1}(p^2) & \mu_1(p^2) \\ \mu_1(p^2) & m_{R1}(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & v(p^2) \\ u(p^2) & \beta(p^2) \end{array} \right) p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} < \xi^\beta | \\ < (\xi^\beta)^c | \\ < (\eta_{\dot{\beta}})^c | \\ < \eta_{\dot{\beta}} | \end{array} \right). \quad (98)$$

PCT symmetry has finally reduced the total number of arbitrary functions necessary to describe one flavor of fermions from sixteen to ten.

5.3 C constraints

C is a unitary operator and we may use directly (32) in the expression of the propagator. This is an example of demonstration, in which we suppose that the vacuum is invariant by C .

$$\begin{aligned} < 0 | \mathcal{T} \xi^\alpha(x) (\eta_{\hat{\beta}})^\dagger(-x) | 0 > = < C 0 | \mathcal{T} C(-i(\eta^{\hat{\alpha}})^\dagger)(x) C^{-1} C(i\xi_{\hat{\beta}})(-x) C^{-1} | C 0 > \\ &= < C 0 | \mathcal{T} C(\eta^{\hat{\alpha}})^\dagger(x) \xi_{\hat{\beta}}(-x) C^{-1} | C 0 > = < 0 | \mathcal{T} C^\dagger C(\eta^{\hat{\alpha}})^\dagger(x) \xi_{\hat{\beta}}(-x) C^{-1} C | 0 > \\ &= < 0 | \mathcal{T} (\eta^{\hat{\alpha}})^\dagger(x) \xi_{\hat{\beta}}(-x) | 0 > = < 0 | \mathcal{T} ((\xi^\alpha)^c)^\dagger(x) ((\eta_{\hat{\beta}})^c)^\dagger(-x) | 0 >. \end{aligned}$$

By using (89) expressing PCT invariance, one gets accordingly

$$\Delta_{C+PCT}(p) = \left(\begin{array}{c} | \xi^\alpha > \quad | (\xi^\alpha)^c > \quad | (\eta_{\hat{\alpha}})^c > \quad | \eta_{\hat{\alpha}} > \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \rho(p^2) & \mu(p^2) \\ \mu(p^2) & \rho(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \left(\begin{array}{cc} \sigma(p^2) & m(p^2) \\ m(p^2) & \sigma(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \beta(p^2) & b(p^2) \\ b(p^2) & \beta(p^2) \end{array} \right) p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} < \xi^\beta | \\ < (\xi^\beta)^c | \\ < (\eta_{\hat{\beta}})^c | \\ < \eta_{\hat{\beta}} | \end{array} \right). \quad (99)$$

All 2×2 submatrices are in particular symmetric.

Combining now (98) and (99), a $C + PCT$ invariant propagator, after using the definition of charge conjugate fields, can finally be reduced to

$$\Delta_{C+PCT}(p) = \left(\begin{array}{c} | \xi^\alpha > \quad | (\xi^\alpha)^c > \quad | (\eta_{\hat{\alpha}})^c > \quad | \eta_{\hat{\alpha}} > \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \rho(p^2) & \mu(p^2) \\ \mu(p^2) & \rho(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \left(\begin{array}{cc} \sigma(p^2) & m(p^2) \\ m(p^2) & \sigma(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} < \xi^\beta | \\ < (\xi^\beta)^c | \\ < (\eta_{\hat{\beta}})^c | \\ < \eta_{\hat{\beta}} | \end{array} \right), \quad (100)$$

in which the number of arbitrary functions has now been reduced to six.

5.4 P constraints

In momentum space, the parity transformed of $p_\mu \sigma^\mu \equiv (p_0 \sigma^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma})$ is $(p_0 \sigma^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma}) \equiv p_\mu \overline{\sigma}^\mu$.

Using (22) and the assumption (89) expressing PCT invariance, and supposing the vacuum invariant by parity, one gets

$$\Delta_{P+PCT}(p) = \left(\begin{array}{c} | \xi^\alpha > \quad | (\xi^\alpha)^c > \quad | (\eta_{\hat{\alpha}})^c > \quad | \eta_{\hat{\alpha}} > \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ b(p^2) & \beta(p^2) \end{array} \right) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \rho(p^2) & \mu(p^2) \\ m(p^2) & \sigma(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \left(\begin{array}{cc} \sigma(p^2) & m(p^2) \\ \mu(p^2) & \rho(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \beta(p^2) & b(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} < \xi^\beta | \\ < (\xi^\beta)^c | \\ < (\eta_{\hat{\beta}})^c | \\ < \eta_{\hat{\beta}} | \end{array} \right). \quad (101)$$

A $P + C + PCT$ invariant propagator writes

$$\Delta_{P+C+PCT}(p) = \left(\begin{array}{c} | \xi^\alpha > \quad | (\xi^\alpha)^c > \quad | (\eta_{\dot{\alpha}})^c > \quad | \eta_{\dot{\alpha}} > \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \rho(p^2) & \mu(p^2) \\ \mu(p^2) & \rho(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \left(\begin{array}{cc} \rho(p^2) & \mu(p^2) \\ \mu(p^2) & \rho(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} < \xi^\beta | \\ < (\xi^\beta)^c | \\ < (\eta_{\dot{\beta}})^c | \\ < \eta_{\dot{\beta}} | \end{array} \right). \quad (102)$$

The expressions above can be further reduced by using the definition of charge conjugate fields, which leads to (98) as the expression of PCT invariance. So doing, a $P + PCT$ invariant propagator writes

$$\Delta_{P+PCT}(p) = \left(\begin{array}{c} | \xi^\alpha > \quad | (\xi^\alpha)^c > \quad | (\eta_{\dot{\alpha}})^c > \quad | \eta_{\dot{\alpha}} > \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ b(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \rho(p^2) & \mu(p^2) \\ \mu(p^2) & \sigma(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \left(\begin{array}{cc} \sigma(p^2) & \mu(p^2) \\ \mu(p^2) & \rho(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & b(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} < \xi^\beta | \\ < (\xi^\beta)^c | \\ < (\eta_{\dot{\beta}})^c | \\ < \eta_{\dot{\beta}} | \end{array} \right); \quad (103)$$

and one finds again the expression (102) for a $P + C + PCT$ invariant propagator.

5.5 CP constraints

Using (34), (89), and supposing the vacuum invariant by CP , one gets

$$\Delta_{CP+PCT}(p) = \left(\begin{array}{c} | \xi^\alpha > \quad | (\xi^\alpha)^c > \quad | (\eta_{\dot{\alpha}})^c > \quad | \eta_{\dot{\alpha}} > \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & u(p^2) \\ v(p^2) & \beta(p^2) \end{array} \right) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} m_L(p^2) & \mu(p^2) \\ m(p^2) & m_R(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \left(\begin{array}{cc} m_L(p^2) & \mu(p^2) \\ m(p^2) & m_R(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & u(p^2) \\ v(p^2) & \beta(p^2) \end{array} \right) p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} < \xi^\beta | \\ < (\xi^\beta)^c | \\ < (\eta_{\dot{\beta}})^c | \\ < \eta_{\dot{\beta}} | \end{array} \right). \quad (104)$$

It can be further constrained by using the definition of charge conjugate fields which makes the PCT constraint be (98), to

$$\Delta_{CP+PCT}(p) = \left(\begin{array}{c} | \xi^\alpha > \quad | (\xi^\alpha)^c > \quad | (\eta_{\dot{\alpha}})^c > \quad | \eta_{\dot{\alpha}} > \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & u(p^2) \\ u(p^2) & \beta(p^2) \end{array} \right) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} m_L(p^2) & \mu(p^2) \\ \mu(p^2) & m_R(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \left(\begin{array}{cc} m_L(p^2) & \mu(p^2) \\ \mu(p^2) & m_R(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & u(p^2) \\ u(p^2) & \beta(p^2) \end{array} \right) p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} < \xi^\beta | \\ < (\xi^\beta)^c | \\ < (\eta_{\dot{\beta}})^c | \\ < \eta_{\dot{\beta}} | \end{array} \right). \quad (105)$$

One then gets 4 symmetric 2×2 sub-blocks.

5.6 Eigenstates of a $C + PCT$ invariant propagator

We do not consider any PCT violation, because, if this occurred, the very foundations of local Quantum Field Theory would be undermined, and the meaning of our conclusions itself could thus strongly be cast in doubt.

We look here for the eigenstates of the 4×4 matrix in (100)

$$\Delta_{C+PCT}(p^2) = \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \sigma^\mu_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \rho(p^2) & \mu(p^2) \\ \mu(p^2) & \rho(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} \\ \hline \left(\begin{array}{cc} \sigma(p^2) & m(p^2) \\ m(p^2) & \sigma(p^2) \end{array} \right) \delta_{\alpha\beta} & \left(\begin{array}{cc} \alpha(p^2) & a(p^2) \\ a(p^2) & \alpha(p^2) \end{array} \right) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta} \end{array} \right). \quad (106)$$

The three symmetric matrices $\begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \mu & \rho \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \sigma & m \\ m & \sigma \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} \alpha & a \\ a & \alpha \end{pmatrix}$ can be simultaneously diagonalized by a unitary matrix U according to

$$\begin{aligned} U^T \begin{pmatrix} \rho & \mu \\ \mu & \rho \end{pmatrix} U &= \begin{pmatrix} (\rho + \mu)e^{2i\varphi} & \\ & (\rho - \mu)e^{-2i\varphi} \end{pmatrix}, \\ U^T \begin{pmatrix} \alpha & a \\ a & \alpha \end{pmatrix} U &= \begin{pmatrix} (\alpha + a)e^{2i\varphi} & \\ & (\alpha - a)e^{-2i\varphi} \end{pmatrix}, \\ U &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & -e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (107)$$

We can choose the particular case

$$U = U_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Call the initial basis

$$|< n_L| = \begin{pmatrix} |< \xi^\alpha| \\ |< (\xi^\beta)^c| \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} |< \xi^\alpha| \\ |< -i(\eta^{\dot{\beta}})^\dagger| \end{pmatrix}, \quad |< n_R| = \begin{pmatrix} |< (\eta^{\dot{\alpha}})^c| \\ |< \eta_{\dot{\beta}}| \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} |< -i(\xi_\alpha)^\dagger| \\ |< \eta_{\dot{\beta}}| \end{pmatrix}, \quad (109)$$

one has

$$\left(| \xi^\alpha > \quad | (\xi^\beta)^c > \quad | (\eta_{\dot{\gamma}})^c > \quad | \eta_{\dot{\delta}} > \right) = \left(| n_L > \quad | n_R > \right). \quad (110)$$

Define the new basis by

$$\begin{aligned} |< N_L| &= U_0^\dagger |< n_L|, \quad |< N_R| = U_0^\dagger |< n_R|, \\ |N_L> &= U_0 |n_L>, \quad |N_R> = U_0 |n_R>. \end{aligned} \quad (111)$$

One has explicitly

$$|< N_L| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |< \xi^\alpha - i(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger| \\ |< -\xi^\alpha - i(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger| \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |< \xi^\alpha + (\xi^\alpha)^c| \\ |< -\xi^\alpha + (\xi^\alpha)^c| \end{pmatrix},$$

$$\langle N_R | = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \langle -i(\xi_\alpha)^\dagger + \eta_{\dot{\alpha}} | \\ \langle +i(\xi_\alpha)^\dagger + \eta_{\dot{\alpha}} | \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \langle \eta_{\dot{\alpha}} + (\eta_{\dot{\alpha}})^c | \\ \langle \eta_{\dot{\alpha}} - (\eta_{\dot{\alpha}})^c | \end{pmatrix}, \quad (112)$$

and one can write

$$\langle N_L | = \begin{pmatrix} \langle \chi^\alpha | \\ \langle (-i)(\omega^{\dot{\beta}})^\dagger | \end{pmatrix}, \langle N_R | = \begin{pmatrix} \langle (-i)(\chi_\alpha)^\dagger | \\ \langle \omega_{\dot{\beta}} | \end{pmatrix}. \quad (113)$$

In this new basis, the propagator writes (using (from (108)) $U_0^T U_0 = 1$)

$$\Delta_{C+PCT}(p^2) = \begin{pmatrix} |N_L\rangle & |N_R\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(p^2) + a(p^2) & \\ & \alpha(p^2) - a(p^2) \end{pmatrix} p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu & \begin{pmatrix} \rho(p^2) + \mu(p^2) & \\ & \rho(p^2) - \mu(p^2) \end{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} \\ \begin{pmatrix} \sigma(p^2) + m(p^2) & \\ & \sigma(p^2) - m(p^2) \end{pmatrix} \delta_{\alpha\beta} & \begin{pmatrix} \alpha(p^2) + a(p^2) & \\ & \alpha(p^2) - a(p^2) \end{pmatrix} p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle N_L | \\ \langle N_R | \end{pmatrix}. \quad (114)$$

Remember that $|u\rangle \langle v|$ corresponds, in our notation, to a propagator $\langle 0 | \mathcal{T} u(x) v^\dagger(-x) | 0 \rangle$.

One introduces the Majorana fermions (see subsection 3.6)

$$\begin{aligned} X_M^\pm &= \begin{pmatrix} \chi^\alpha \\ \pm(-i)(\chi_\alpha)^\dagger \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi^\alpha + (\xi^\alpha)^c \\ \pm(\eta_{\dot{\alpha}} + (\eta_{\dot{\alpha}})^c) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \xi^\alpha - i(\eta^{\dot{\alpha}})^\dagger \\ \pm(\eta_{\dot{\alpha}} - i(\xi_\alpha)^\dagger) \end{pmatrix}, \\ \Omega_M^\pm &= \begin{pmatrix} \pm(-i)(\omega^{\dot{\beta}})^\dagger \\ \omega_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm(-\xi^\beta + (\xi^\beta)^c) \\ \eta_{\dot{\beta}} - (\eta_{\dot{\beta}})^c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm(-\xi^\beta - i(\eta^{\dot{\beta}})^\dagger) \\ \eta_{\dot{\beta}} + i(\xi_\beta)^\dagger \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (115)$$

5.6.1 Kinetic-like propagators

They can be rewritten

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | \mathcal{T} \chi^\alpha(x) (\chi^\beta)^\dagger(-x) | 0 \rangle &= (\alpha(p^2) + a(p^2)) p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu, \\ \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | \mathcal{T} (\chi_\alpha)^\dagger(x) \chi_\beta(-x) | 0 \rangle &= (\alpha(p^2) + a(p^2)) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta}, \\ \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | \mathcal{T} (\omega^{\dot{\alpha}})^\dagger(x) \omega^{\dot{\beta}}(-x) | 0 \rangle &= (\alpha(p^2) - a(p^2)) p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu, \\ \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | \mathcal{T} \omega_{\dot{\alpha}}(x) (\omega_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 \rangle &= (\alpha(p^2) - a(p^2)) p_\mu \overline{\sigma}^\mu_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (116)$$

5.6.2 Mass-like propagators

They write

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | \mathcal{T} \chi^\alpha(x) i\chi_\beta(-x) | 0 \rangle &= \delta_{\alpha\beta} (\rho(p^2) + \mu(p^2)), \\ \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | \mathcal{T} (-i)(\chi_\alpha)^\dagger(x) (\chi^\beta)^\dagger(-x) | 0 \rangle &= \delta_{\alpha\beta} (\sigma(p^2) + m(p^2)), \\ \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | \mathcal{T} (-i)(\omega^{\dot{\alpha}})^\dagger(x) (\omega_{\dot{\beta}})^\dagger(-x) | 0 \rangle &= \delta_{\alpha\beta} (\rho(p^2) - \mu(p^2)), \\ \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | \mathcal{T} \omega_{\dot{\alpha}}(x) i\omega^{\dot{\beta}}(-x) | 0 \rangle &= \delta_{\alpha\beta} (\sigma(p^2) - m(p^2)). \end{aligned} \quad (117)$$

5.6.3 Conclusion

When C and PCT invariance holds, the fermion propagator decomposes into the propagators for the Majorana fermions X and Ω (115) (note that we have introduced below the “bar” fields instead of the † fields, thus a γ^0 matrix)

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{ipx} <0| \mathcal{T} X_{M\alpha}^\pm(x) \overline{X_{M\beta}^\pm}(-x) |0> &= \begin{pmatrix} (\rho(p^2) + \mu(p^2))\delta_{\alpha\beta} & (\alpha(p^2) + a(p^2))p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \\ (\alpha(p^2) + a(p^2))p_\mu \overline{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu & (\sigma(p^2) + m(p^2))\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \\ \int d^4x e^{ipx} <0| \mathcal{T} \Omega_{M\alpha}^\pm(x) \overline{\Omega_{M\beta}^\pm}(-x) |0> &= \begin{pmatrix} (\rho(p^2) - \mu(p^2))\delta_{\alpha\beta} & (\alpha(p^2) - a(p^2))p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \\ (\alpha(p^2) - a(p^2))p_\mu \overline{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu & (\sigma(p^2) - m(p^2))\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (118)$$

(118) also writes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^4x e^{ipx} (<0| \mathcal{T} X_{M\alpha}^\pm(x) \overline{X_{M\beta}^\pm}(-x) |0> + <0| \mathcal{T} \Omega_{M\alpha}^\pm(x) \overline{\Omega_{M\beta}^\pm}(-x) |0>) \\ &= \begin{pmatrix} \rho(p^2)\delta_{\alpha\beta} & \alpha(p^2)p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \\ \alpha(p^2)p_\mu \overline{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu & \sigma(p^2)\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{2} \int d^4x e^{ipx} (<0| \mathcal{T} X_{M\alpha}^\pm(x) \overline{X_{M\beta}^\pm}(-x) |0> - <0| \mathcal{T} \Omega_{M\alpha}^\pm(x) \overline{\Omega_{M\beta}^\pm}(-x) |0>) \\ &= \begin{pmatrix} \mu(p^2)\delta_{\alpha\beta} & a(p^2)p_\mu \sigma_{\alpha\beta}^\mu \\ a(p^2)p_\mu \overline{\sigma}_{\alpha\beta}^\mu & m(p^2)\delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (119)$$

So, when $C + PCT$ invariance is realized, the most general fermion propagator is equivalent to two Majorana propagators.

The determinant of $\Delta(p^2)$ (114) is the products of the determinants of the matrices in the r.h.s. of (118); so, the poles of the two Majorana propagators in (118) are also poles of $\Delta(p^2)$, and the physical states (eigenstates of the propagator at its poles) are the Majorana fermions X and Ω .

6 General conclusion

We have gone in this work along the first steps towards the propagator approach to coupled fermions in Quantum Field Theory. We first recalled basic principles, concerning in particular discrete transformations, unitary and antiunitary. After showing on a simple example how ambiguities appear in the classical treatment of a fermionic Lagrangian, we investigated the most general fermionic propagator for one fermion flavor. Since Lorentz invariance allows the presence of particle-antiparticle couplings, we have seen that this propagator is, de facto, the one of a binary system.

We hope to report soon on the case of several flavors and their mixing.

Acknowledgments: conversations with V.A. Novikov and M.I. Vysotsky are gratefully acknowledged.

A Notations. Spinors

A.1 Weyl spinors

We adopt the notations of [10], with undotted and dotted indices.

Undotted spinors, contravariant ξ^α or covariant ξ_α can be also called left spinors. Dotted spinors, covariant $\eta_{\dot{\alpha}}$ or contravariant $\eta^{\dot{\alpha}}$ can then be identified as right spinors. They are 2-components complex spinors. The 2-valued spinor indices are not explicitly written.

By an arbitrary transformation of the proper Lorentz group

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad (120)$$

they transform by

$$\begin{aligned} \xi^{1'} &= \alpha\xi^1 + \beta\xi^2, \\ \xi^{2'} &= \gamma\xi^1 + \delta\xi^2, \\ \eta^{\dot{1}'} &= \alpha^*\eta^{\dot{1}} + \beta^*\eta^{\dot{2}}, \\ \eta^{\dot{2}'} &= \gamma^*\eta^{\dot{1}} + \delta^*\eta^{\dot{2}}. \end{aligned} \quad (121)$$

To raise or lower spinor indices, one has to use the metric of $SL(2, C)$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_{\alpha\beta}^2; \quad g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i(\sigma^2)_{\alpha\beta}, \quad (122)$$

and the same for dotted indices. The σ^2 matrix will always be represented with indices down.

$$\xi_\alpha = g_{\alpha\beta}\xi^\beta = i\sigma_{\alpha\beta}^2\xi^\beta, \eta_{\dot{\alpha}} = g_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\eta^{\dot{\beta}} = -i\sigma_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}^2\eta^{\dot{\beta}}. \quad (123)$$

One has

$$\xi.\zeta = \xi^\alpha\zeta_\alpha = \xi^1\zeta^2 - \xi^2\zeta^1 = -\xi_\alpha\zeta^\alpha \text{ invariant}. \quad (124)$$

By definition, $\eta_{\dot{\alpha}} \sim \xi_\alpha^*$ (transforms as);

$$\eta_{\dot{\alpha}} \sim (g_{\alpha\beta}\xi^\beta)^* = g_{\alpha\beta}(\xi^\beta)^* = i\sigma_{\alpha\beta}^2\xi^{\beta*} : \quad (125)$$

a right-handed Weyl spinor and the complex conjugate of a left-handed Weyl spinor transform alike by Lorentz; likewise, a left-handed spinor transforms like the complex conjugate of a right-handed spinor.

A Dirac (bi-)spinor is

$$\xi_D = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}. \quad (126)$$

A.2 Pauli and Dirac matrices

Since we work with Weyl fermions, we naturally choose the Weyl representation.

Pauli matrices:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (127)$$

γ matrices

$$\gamma^0 = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \gamma^i = \left(\begin{array}{cc} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{array} \right), \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right), \quad (128)$$

and one notes

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}) = \gamma^0 \left(\begin{array}{cc} \sigma^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \end{array} \right), \quad (129)$$

with

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \vec{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\vec{\sigma}), \quad \vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3). \quad (130)$$

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^\dagger &= \gamma^0, (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, (\gamma^{1,2,3})^\dagger = -\gamma^{1,2,3}, \\ (\gamma^0)^* &= \gamma^0, (\gamma^5)^* = \gamma^5, (\gamma^{1,3})^* = \gamma^{1,3}, (\gamma^2)^* = -\gamma^2, \\ (\gamma^0)^2 &= 1, (\gamma^5)^2 = 1, (\gamma^{1,2,3})^2 = -1, \\ \gamma^0(\gamma^0)^\dagger &= 1, \gamma^5(\gamma^5)^\dagger = 1, \gamma^{1,2,3}(\gamma^{1,2,3})^\dagger = 1. \end{aligned} \quad (131)$$

One has

$$(\sigma^0)^2 = 1 = (\sigma^i)^2, \{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij}. \quad (132)$$

One has the relation

$$\sigma_{\beta\delta}^2 \sigma_{\alpha\gamma}^2 = \delta_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\delta} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma}, \quad (133)$$

and the following one is very useful

$$\sigma^2 \sigma^i \sigma^2 = -(\sigma^i)^*, \quad \sigma^2 \sigma^0 \sigma^2 = \sigma^0 \Rightarrow \sigma^2 \sigma^\mu \sigma^2 = (\sigma^0, -\vec{\sigma}^*) = \bar{\sigma}^{\mu*}. \quad (134)$$

As far as kinetic terms are concerned,

$$\gamma^0 \gamma^\mu p_\mu = (\gamma^0)^2 p_\mu \left(\begin{array}{cc} \sigma^\mu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}^\mu \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} p^0 - \vec{p} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & p^0 + \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \end{array} \right). \quad (135)$$

B The adjoint of an antilinear operator

Following Weinberg [9], let us show that the adjoint of an antilinear operator (see (5) for the definition) \mathcal{A} cannot be defined by $\langle \mathcal{A}\psi | \chi \rangle = \langle \psi | \mathcal{A}^\dagger | \chi \rangle$ ²⁴. Indeed, suppose that we can take the usual definition above, and let c be a c-number; using the antilinearity of \mathcal{A} one gets $\langle \mathcal{A}(c\psi) | \chi \rangle = \langle c^* \mathcal{A}\psi | \chi \rangle = c \langle \mathcal{A}\psi | \chi \rangle = c \langle \psi | \mathcal{A}^\dagger | \chi \rangle$ is linear in ψ .

But one has also $\langle \mathcal{A}(c\psi) | \chi \rangle = \langle (c\psi) | \mathcal{A}^\dagger | \chi \rangle = \langle \psi | c^* \mathcal{A}^\dagger | \chi \rangle = c^* \langle \psi | \mathcal{A}^\dagger | \chi \rangle$ is antilinear in ψ , which is incompatible with the result above. So, the two expressions cannot be identical and $\langle \mathcal{A}\psi | \chi \rangle \neq \langle \psi | \mathcal{A}^\dagger | \chi \rangle$.

Weinberg ([9] p.51) defines the adjoint by²⁵

$$\langle \psi | \mathcal{A}^\dagger | \chi \rangle \equiv \langle \psi | \mathcal{A}^\dagger | \chi \rangle = \langle \mathcal{A}\psi | \chi \rangle^* = \langle \chi | \mathcal{A} \psi \rangle \equiv \langle \chi | \mathcal{A} | \psi \rangle \quad (137)$$

²⁴This changes nothing to our demonstrations.

²⁵So defined, taking $\psi = \chi$, the adjoint satisfies $\langle \psi | \mathcal{A} | \psi \rangle = \langle \psi | \mathcal{A}^\dagger | \psi \rangle$. This entails in particular that, for a antiunitary operator

$$\langle \psi | \mathcal{A}^\dagger | \psi \rangle^* \neq \langle \psi | \mathcal{A} | \psi \rangle, \quad (136)$$

unless what happens for antiunitary operators (otherwise the matrix element $\langle \psi | \mathcal{A} | \psi \rangle$ of any antiunitary operator could only be real, which is nonsense).

Then, even for an antilinear and antiunitary operator one has ²⁶

$$\mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} = 1. \quad (138)$$

Indeed, $\langle \psi | \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} | \chi \rangle = \langle \psi | \mathcal{A}^\dagger | \mathcal{A} \chi \rangle \stackrel{(137)}{=} \langle \mathcal{A} \chi | \mathcal{A} | \psi \rangle = \langle \mathcal{A} \chi | \mathcal{A} \psi \rangle \stackrel{\text{antiunitarity}}{=} \langle \psi | \chi \rangle$.

By a similar argument, and because \mathcal{A}^\dagger is also antiunitary, one shows that one can also take $\mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger = 1$.

So, both linear unitary \mathcal{U} and antilinear antiunitary \mathcal{A} operators satisfy

$$\mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger = 1 = \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U}, \quad \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger = 1 = \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A}. \quad (139)$$

C Classical versus quantum Lagrangian; complex versus hermitian conjugation

In most literature, a fermionic Lagrangian (specially for neutrinos), is completed by its complex conjugate. This is because, at the classical level, a Lagrangian is a scalar and the fields in there are classical fields, not operators.

However, when fields are quantized, they become operators, so does the Lagrangian which is a sum of (local) products of fields, such that, in this case, the complex conjugate should be replaced by the hermitian conjugate.

Consider for example two Dirac fermions $\chi = \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \eta_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}$ and $\psi = \begin{pmatrix} \varphi^\alpha \\ \omega_{\dot{\beta}} \end{pmatrix}$; a typical mass term in a

classical Lagrangian reads $\overline{\chi_L} \psi_R = (\xi^\alpha)^* \omega_{\dot{\alpha}} = \xi^{\dot{\alpha}} \omega_{\dot{\alpha}} = -\omega_{\dot{\alpha}} \xi^{\dot{\alpha}} = \omega^{\dot{\alpha}} \xi_{\dot{\alpha}}$, where we have supposed that ξ and ω anticommute; its complex conjugate reads then $(\overline{\chi_L} \psi_R)^* = \omega^\alpha \xi_\alpha = (\omega^{\dot{\alpha}})^* \xi_\alpha$.

If we now consider operators $(\overline{\chi_L} \psi_R) = [\xi^\alpha]^\dagger [\omega_{\dot{\alpha}}] = [\chi_L]^\dagger [\psi_R]$, and its hermitian conjugate is $[\omega_{\dot{\alpha}}]^\dagger [\xi^\alpha] = [\omega_{\dot{\alpha}}^*] [\xi^\alpha]$. Since $([\chi_L]^\dagger [\psi_R])^\dagger = [\psi_R]^\dagger [\chi_L]$, it only ‘coincides’ with the classical complex conjugate if we adopt the convention

$$\psi_R^\dagger \chi_L = (\omega^{\dot{\beta}})^* \xi_\beta, \quad (140)$$

where one has raised the index of ω and lowered the one of ξ . We will hereafter adopt (140).

D On the use of effective expressions for the P , C and T operators when acting on a Dirac fermion

In the body of this paper we have chosen to work with fundamental Weyl fermions ξ^α and $\eta_{\dot{\alpha}}$. In order to determine the action on these of the discrete symmetries P , C and T , we began by expressing their action on Dirac fermions in terms of γ matrices, and, then, deduced from the obtained rules of transformation the ones for each component.

However, one must be very cautious with respect to the expression of the action of P , C and T in terms of Dirac gamma matrices; this notation indeed easily induces into confusion and error, as we show below. It can be specially misleading when calculating the action of various products of these three symmetries. Only a very careful use of this γ notation can prevent one going astray. This is why, in manipulating the symmetry operators, we take as a general principle to strictly use their action on Weyl fermions, associated with the knowledge of their linearity/antilinearity.

Since, nevertheless, using the Dirac formalism is very common among physicists, we also give in the following the correct rules for manipulating, in this language, discrete transformations and their various products.

Let K be a transformation having the following expression on a Dirac fermion ψ : $K \cdot \psi = U_K \psi^{(*)}$, where U_K is a matrix which is in general unitary. In the case of the usual transformations P , C and T , U_K

²⁶This is in contradiction with [11].

may be expressed in terms of γ matrices. One must keep in mind that this does not provide a complete characterization of the corresponding transformation, but only an effective one that must be handled with extreme care. It can indeed be misleading, specially if one relies on “intuition” to infer from this expression the linearity or antilinearity of the transformation under consideration.

The linear/antilinear character of a transformation cannot be deduced from the form it takes when acting on a Dirac fermion, and one must refrain from doing such an inference which is in particular wrong for C and T .

Indeed, $P \cdot \psi = i\gamma^0\psi$ and P is linear; $C \cdot \psi = \gamma^2\psi^*$ and C is linear; $T \cdot \psi = i\gamma^3\gamma^1\psi^*$ and T is antilinear; $PCT \cdot \psi = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi$ and PCT is antilinear.

To illustrate this, let us investigate three *a priori* possible ways of computing the action of PCT , and compare them with the correct result, obtained by applying directly to Weyl fermions the three transformations successively (taking into account the linearity/antilinearity properties of operators):

* the crudest way consists in basically multiplying the U_K 's, without taking into account any action on a spinor (hence neglecting any consideration concerning complex conjugation);

* the second one [10], that we call “Landau” uses as a rule the composition of the symmetry actions on a Dirac spinor;

* eventually, the third one consists of acting with each operator *only on the fermion field itself*, and making careful use of linearity/antilinearity to pass through the possible other terms that occur on the left of ψ . This last method, as we will see by going back to the transformation resulting for each component of ψ , is the only correct one.

- crude : $PCT = U_P U_C U_T = (i\gamma^0)\gamma^2(i\gamma^3\gamma^1) = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.
 - Landau : $PCT\psi = P(C(T\psi)) = i\gamma^0(\gamma^2(i\gamma^3\gamma^1\psi^*)) = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi$, hence $PCT = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.
 - cautious :
- $$\begin{aligned} \psi &\xrightarrow{T} T \cdot \psi = i\gamma^3\gamma^1\psi^* \\ &\xrightarrow{C} C \cdot (i\gamma^3\gamma^1\psi^*) = i\gamma^3\gamma^1 C \cdot \psi^* = i\gamma^3\gamma^1 (C \cdot \psi)^* = i\gamma^3\gamma^1 (\gamma^2)^* \psi = -i\gamma^3\gamma^1\gamma^2\psi \\ &\xrightarrow{P} P \cdot (-i\gamma^3\gamma^1\gamma^2\psi) = -i\gamma^3\gamma^1\gamma^2 P \cdot \psi = -i\gamma^3\gamma^1\gamma^2 (i\gamma^0\psi) = \gamma^3\gamma^1\gamma^2\gamma^0\psi = -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi. \end{aligned}$$

Similarly,

- crude : $(PCT)^2 = (-\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(-\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -\psi$.
- Landau : $(PCT)^2\psi = PCT(PCT\psi) = (\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)(\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)\psi = -\psi$.
- cautious :

$$\begin{aligned} (PCT)^2 \cdot \psi &= (PCT) \cdot ((PCT) \cdot \psi) \\ &= (PCT)(-\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi) \\ &= (-\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^*(PCT) \cdot \psi \\ &= -\gamma^0\gamma^1(\gamma^2)^*\gamma^3(PCT) \cdot \psi \\ &= -\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi \\ &= \psi. \end{aligned}$$

The “cautious” method is the only one which agrees with that directly inferred from the work on Weyl fermions. Nevertheless, it is to be noted that we obtain the correct sign for PCT (though not for $(PCT)^2$) by the crude calculation. So in order to discriminate without any ambiguity between the three ways of manipulating the symmetry operators when acting on a Dirac fermion, *i.e.* to avoid (or minimize) any risk of accidental agreement due to cancellation of two mistakes, we computed systematically the other products (of two operators) that we can form, and compare the results with the reliable ones obtained directly on the Weyl fermions. The results are summarized below :

	TP	TC	CP
Crude (trivial product of U 's)	$\xi^\alpha \rightarrow -(\eta^{\dot{\alpha}})^*$ $\eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow (\xi_\alpha)^*$ $PT = TP$	$\xi^\alpha \rightarrow -\eta_{\dot{\alpha}}$ $\eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow \xi^\alpha$ $CT = TC$	$\xi^\alpha \rightarrow -(\xi_\alpha)^*$ $\eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow -(\eta^{\dot{\alpha}})^*$ $PC = CP$
Landau (composition)	$\xi^\alpha \rightarrow (\eta^{\dot{\alpha}})^*$ $\eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow -(\xi_\alpha)^*$ $PT = -TP$	$\xi^\alpha \rightarrow \eta_{\dot{\alpha}}$ $\eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow -\xi^\alpha$ $CT = TC$	$\xi^\alpha \rightarrow (\xi_\alpha)^*$ $\eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow (\eta^{\dot{\alpha}})^*$ $PC = CP$
Cautious (our way of computing)	$\xi^\alpha \rightarrow (\eta^{\dot{\alpha}})^*$ $\eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow -(\xi_\alpha)^*$ $PT = TP$	$\xi^\alpha \rightarrow -\eta^{\dot{\alpha}}$ $\eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow \xi^\alpha$ $CT = -TC$	$\xi^\alpha \rightarrow (\xi_\alpha)^*$ $\eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow (\eta^{\dot{\alpha}})^*$ $PC = CP$
Right result (directly from Weyl fermions)	$\xi^\alpha \rightarrow (\eta^{\dot{\alpha}})^*$ $\eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow -(\xi_\alpha)^*$ $PT = TP$	$\xi^\alpha \rightarrow -\eta^{\dot{\alpha}}$ $\eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow \xi^\alpha$ $CT = -TC$	$\xi^\alpha \rightarrow (\xi_\alpha)^*$ $\eta_{\dot{\alpha}} \rightarrow (\eta^{\dot{\alpha}})^*$ $PC = CP$

Moreover, our way of computing ensures that $T^2 = 1$, in agreement with the result from Weyl spinors, while one encounters problems with the Landau method which leads to $T^2 = -1$. Indeed, $T^2 \cdot \psi = T \cdot (i\gamma^3\gamma^1\psi^*) = -i\gamma^3\gamma^1 T \cdot \psi^* = -i\gamma^3\gamma^1 (T \cdot \psi)^* = -i\gamma^3\gamma^1 (-i)\gamma^3\gamma^1\psi = \psi$, while Landau's prescription leads to $T^2 \cdot \psi = i\gamma^3\gamma^1 (i\gamma^3\gamma^1\psi^*)^* = i\gamma^3\gamma^1 (-i)\gamma^3\gamma^1\psi = \gamma^3\gamma^1\gamma^3\gamma^1\psi = -\psi$.

References

- [1] B. MACHET, V.A. NOVIKOV & M.I. VYSOTSKY: “Binary Systems of Neutral Mesons in Quantum Field Theory”, *hep-ph/0407268*, *Int. J. Mod. Phys. A* 20 (2005) 5399-5452.
- [2] V.A. NOVIKOV: “Binary systems in QM and in QFT: CPT”, *hep-ph/0509126*, published in “La Thuile 2005, Results and perspectives in particle physics” p.321-332.
- [3] E.P. WIGNER: “Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren” (Vieweg, Braunschweig 1931, p.251-3. Reprinted by Edwards Brothers, Ann Arbor 1944); Translated into english by James J. Griffiths: “Group theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra” (Academic Press, New York, 1959).
- [4] R.F. STREATER & A.S. WIGHTMAN: “PCT, Spin and Statistics, and All That”, *The Mathematical Physics Monograph Series*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Advanced Book Program (Reading, Massachusetts, 1972).
- [5] E.P. WIGNER: “Über die Operation des Zeitumkehr in der Quantenmechanik”, *Nachrichten des Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Mathematisch-Physikalische Klasse* (1932), 546-559; see formula III p.216;
Translated into english by James J. Griffiths: “Group theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra” (Academic Press, New York, 1959); see formula (26.6.a) p.328.
- [6] M. BEUTHE: “Oscillations of neutrinos and mesons in Quantum Field Theory”, *hep-ph/0109119* *Phys. Rept.* 375 (2003) 105-218.
- [7] Q. DURET, B. MACHET & M.I. VYSOTSKY: “Mixing angles of quarks and leptons in Quantum Field Theory”, *arXiv:0805.4121 [hep-ph]*.
- [8] N.N. BOGOLUBOV, A.A. LOGUNOV, A.I. OKSAK & I.T. TODOROV: “General principles of Quantum Field Theory”, *Mathematical Physics and Applied Mathematics*, Volume 10, Kluwer Academic Publishers (Dordrecht, Boston, London 1990); translated from the Russian (Nauka Publishers, Moscow 1987) by G.G. Gould.
- [9] S. WEINBERG: “The Quantum Theory of Fields”, vol.1, *Foundations*. Cambridge University Press (Cambridge, UK, 1995).
- [10] V. BERESTETSKI, E. LIFSHITZ & L. PITAYEVSKI: “Théorie Quantique Relativiste” tome 1 (Landau & Lifshitz, *Physique Théorique IV*), Editions MIR (Moscou, 1972).
V.B. BERESTETSKY, E.M. LIFSHITZ & L.P. PITAYEVSKY: “Quantum Electrodynamics”, *Course of Theoretical Physics*, 4 (Pergamon Press, Oxford, UK, 1982).
- [11] G.C. BRANCO, L. LAVOURA & J.P. SILVA: “CP violation”, *International Series of Monographs on Physics* 103 (Clarendon Press, Oxford, 1999).
- [12] C. ITZYKSON & J.B. ZUBER: “Quantum Field Theory”, *McGraw-Hill International Editions, Physics Series* (McGraw-Hill, Singapore 1980).
- [13] M.E. PESKIN & D.V. SCHROEDER: “Quantum Field Theory”, *The Advanced Book Program, Perseus Books* (Reading, Massachusetts, 1995).
- [14] T.D. LEE: “Particle Physics and Introduction to Field Theory”, *Contemporary Concepts in Physics*, volume 1 (Harwood Academic Publishers, London, UK, 1982).